ANALYSE FONCTIONNELLE

J. Mellac

Juillet 1998

Première partie

THEORIE DE LA MESURE ET DE L'INTEGRATION

Chapitre 1

MESURE ET INTEGRATION

Ce chapitre introduit la notion de mesure permettant en particulier de généraliser la notion d'intégrale étudiée en classe préparatoire. La construction est certes un peu délicate, mais permet de simplifier les passages à la limite et les calculs d'intégrales multiples.

1.1 APPLICATIONS MESURABLES

Définition 1.1 *On appelle tribu ou σ-algèbre sur un ensemble X, un ensemble de parties $\mathcal{A}$ de X vérifiant :*

1. *Toute réunion finie ou dénombrable d'ensembles appartenant à $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathcal{A}$. Autrement dit si*

$$\forall n \in I\!N\ ,\ A_n \in \mathcal{A}\ ,\ \cup_{n \in I\!N} A_n \in \mathcal{A}$$

2. *Le complémentaire d'un élément de $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathcal{A}$.*

$$\forall A \in \mathcal{A}\ ,\ A^c \in \mathcal{A}$$

3. $\emptyset \in \mathcal{A}$

<u>Remarques</u>

1. Une conséquence de cette définition est que toute intersection finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathcal{A}$.
2. $X \in \mathcal{A}$
3. $$A \in \mathcal{A}\ ,\ B \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B = A \cap B^c \in \mathcal{A} \text{ et } A \Delta B = (A-B) \cup (B-A) \in \mathcal{A}$$
4. Si la réunion dénombrable est remplacée par une réunion finie, $\mathcal{A}$ est une algèbre. Toute σ- algèbre est une algèbre mais la réciproque est fausse.

L'ensemble de toutes les parties de X étant noté $\mathcal{P}(X)$, pour tout ensemble de parties $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, il existe une plus petite tribu contenant tous les éléments de $\mathcal{E}$, elle est notée $\mathcal{T}(\mathcal{E})$. En effet l'ensemble des tribus contenant $\mathcal{E}$ n'est pas vide car elle contient $\mathcal{P}(X)$,l'intersection de toutes ces tribus est alors $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ appelée tribu engendrée par $\mathcal{E}$.

Théoreme 1.1 *Soit $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{B}$ une tribu sur Y, alors $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B)|B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur X.*

Ceci provient des relations

$$f^{-1}(\cup_{n\in I\!N} B_n) = \cup_{n\in I\!N} f^{-1}(B_n)\ ,\ f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c\ ,\ f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

Définition 1.2 *On appelle espace mesurable le couple $(X, \mathcal{A})$ où X est un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur X. On appelle ensembles mesurables les éléments de $\mathcal{A}$. $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ étant deux espaces mesurables, une application $f : X \to Y$ est dite $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ mesurable si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ c'est à dire si $\forall B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont fixés une fois pour toute, on dit que f est mesurable tout simplement.*

Théoreme 1.2 *Soit l'application $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ et $\mathcal{E}$ un ensemble de parties de Y engendrant $\mathcal{B}$, f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$*

Commençons par démontrer un résultat ayant une importance par lui-même

lemme 1.2.1 *Les deux tribus de X*

$$f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))\ et\ \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E}))$$

sont les mêmes

On a tout d'abord $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$ donc $\mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E}) \subset f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$ car le deuxième terme de l'inclusion est une tribu et le premier la plus petite tribu contenant $f^{-1}(\mathcal{E})$. Montrons l'inclusion inverse. Notons $\mathcal{C} = \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{D} = \{B \subset Y | f^{-1}(B) \in \mathcal{C}\}$. On vérifie que $\mathcal{D}$ est une tribu, appelée tribu induite de $\mathcal{C}$ par f. Il faut noter par contre que $f(\mathcal{C})$ n'est pas nécessairement une tribu. La tribu $\mathcal{D}$ contient $\mathcal{E}$, donc également $\mathcal{T}(\mathcal{E})$. On peut écrire

$$f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{E})) \subset f^{-1}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E})) = \mathcal{C}$$

. On a donc bien $f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{E})) = \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E}))$.
Revenons à la démonstration du théorème. Si f est mesurable on a $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$, réciproquement si cette inégalité est vérifiée on a

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{E})) = \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E})) \subset \mathcal{A}$$

et f est bien mesurable.
Remarque.
Si

$$f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B}) \text{ et } g : (Y, \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{C})$$

sont mesurables, $g \circ f$ est $\mathcal{A} - \mathcal{C}$ mesurable en tant qu'application de X vers Z.

Définition 1.3 *On considère une tribu $\mathcal{A}$ sur X et une tribu $\mathcal{B}$ sur Y, la tribu produit de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{B}$, notée $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est la tribu engendrée par l'ensemble des rectangles $A \times B$ où $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$*

Corollaire 1.2.1 *On considère trois espaces mesurables $(X, \mathcal{A})$, $(Y_1, \mathcal{B}_1)$ et $(Y_2, \mathcal{B}_2)$ et une application de X dans $Y_1 \times Y_2$. Pour que f soit $\mathcal{A} - \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ mesurable il faut et il suffit que $f_1 = p_1 \circ f$ et $f_2 = p_2 \circ f$ soient mesurables, où p_1 et p_2 sont les projections canoniques de $Y_1 \times Y_2$ sur Y_1 et Y_2 respectivement.*

Démonstration
Si $B_1 \in \mathcal{B}_1$, $p_1^{-1}(B_1) = B_1 \times Y_2 \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, p_1 est donc mesurable , il en est de même de p_2, si f est mesurable f_1 et f_2 le sont d'après la remarque précédente. Réciproquement si ,f_1 et f_2 sont mesurables et si $B_1 \in \mathcal{B}_1$, $B_2 \in \mathcal{B}_2$, $f^{-1}(B_1 \times B_2) = f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2)$ est élément de $\mathcal{A}$, ce qui montre que f est mesurable d'après le théorème précédent.
Exemple 1 : Applications Boréliennes
on appelle tribu borélienne sur un espace topologique X la tribu engendrée par les ouverts de X. Les éléments de cette tribu sont appelés les boréliens de X. Cette tribu est aussi engendrée par les fermés de X. Dans le cas où $X = I\!R$ les intervalles $]a, +\infty[$ où $a \in I\!R$ engendrent la tribu des boréliens notée $\mathcal{B}(I\!R)$. En effet $[a, +\infty[= \cap_{n \geq 1}]a - 1/n, +\infty[$ est élément de cette tribu. De même $]-\infty, a[= ([a, +\infty[)^c$ est élément de cette tribu, donc $]a, b[=]-\infty, b[\cup]a, +\infty[$ est élément de cette tribu, il en est de même de tout ouvert qui est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts. Cette tribu est donc confondue avec $\mathcal{B}(I\!R)$.Si X et Y sont des espaces topologiques et $\mathcal{B}(X)$ et $\mathcal{B}(Y)$ leurs tribus de boréliens, une application f de X dans Y est dite boréliennesi elle est $\mathcal{B}(X) - \mathcal{B}(Y)$ mesurable.
Si une application $f : X \to Y$ est continue et si O est un ouvert de Y, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X, toute application continue est donc Borélienne d'après le théorème 1.2. Dans la suite Y sera en général $I\!R$ ou $\mathbb{C}$.
Critère de mesurabilité
Une application f de l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ vers $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$ est mesurable si et seulement si

$$\forall a \in I\!R \ , \ [f > a] = \{x \in X | f(x) > a\} \in \mathcal{A}$$

Ceci provient du théorème 1.2 par le fait que les intervalles $]a, +\infty[$ engendrent $\mathcal{B}(I\!R)$. Lorsque $f : X \to \mathbb{C}$, le corollaire montre que f est mesurable si et seulement si Ref et Imf sont mesurables.

Théoreme 1.3 *On considère deux fonctions mesurables f et g de $(X, \mathcal{A})$ vers $I\!R$ ou $\mathbb{C}$.*
1) $\forall \alpha > 0$, $|f|^\alpha$ est mesurable.
2) Si f ne s'annule pas $1/f$ est mesurable.
3) $f + g$ et fg sont mesurables.

Démonstration
1) $|f|^\alpha$ est la composée de l'application mesurable f et de l'application continue

$z \to |z|^\alpha$, elle est donc mesurable.
2) $1/f$ est composée de f et de $x \to 1/x$ qui est continue sur $\mathbb{R}^*$. Si f s'annule et si $A = [f = 0] = \{x \in X | f(x) = 0\}$ alors $A \in \mathcal{A}$ et l'application g définie par

$$g(x) = \begin{cases} 1/f(x) & \text{si} \quad x \notin A \\ b & \text{si} \quad x \in A \end{cases}$$

où $b \in \mathbb{R}$, est mesurable. En effet si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $b \notin B$, $g^{-1}(B) = f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, si $b \in B$, $g^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cup A \in \mathcal{A}$.
3) $f + g$ est composée de l'application $x \to (f(x), g(x))$ de X vers $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$ qui est mesurable d'après le corollaire et de l'application $(z_1, z_2) \to z_1 + z_2$ qui est continue. On peut faire un raisonnement analogue pour fg.

Quand (f_n) est une suite d'applications mesurables de X dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), on définit les fonctions
$(\sup f_n)(x) = \sup_n (f_n(x))$
$(\inf f_n)(x) = \inf_n (f_n(x))$
$\left(\overline{\lim} f_n\right)(x) = \inf_n \left(\sup_{k \geq n} f_k(x)\right)$
($\overline{\lim}$) se lit limite supérieure et $\underline{\lim}$ se lit limite inférieure).
$(\underline{\lim} f_n)(x) = \sup_n (\inf_{k \geq n} f_k(x))$
La suite (f_n) converge simplement sur X si et seulement si $(\lim f_n)(x)$ existe pour tout $x \in X$ ou ce qui est équivalent si et seulement si

$$\forall x \in X \ , \ \left(\overline{\lim} f_n\right)(x) = (\underline{\lim} f_n)(x).$$

Ces différentes fonctions sont à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ en général même si toutes les f_n prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théoreme 1.4 *Lorsque les f_n sont mesurables, toutes les applications définies précédemment sont mesurables.*

Démonstration
Ceci se démontre à partir du critère de mesurabilité
$[\sup f_n > a] = \cup_{n \geq 1} [f_n > a]$, $[\inf f_n > a] = \cap_{n \geq 1} [f_n > a]$.
Si $g_n = \sup_{k \geq n} f_k$, g_n est mesurable d'après ce qui précède, donc $\inf g_n = \overline{\lim} f_n$ est également mesurable.

Définition 1.4 *Une application $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est étagée si elle est mesurable finie et ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*

Pour un ensemble A on définit

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A \\ 1 & \text{si} \quad x \in A \end{cases}$$

appelée fonction indicatrice de A. Elle est mesurable si et seulement si A est mesurable, c'est à dire si $A \in \mathcal{A}$. Si f est une fonction étagée prenant les n valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ et si $A_i = [f = \alpha_i]$, A_i est mesurable et $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$. Comme $\chi_A + \chi_B = \chi_{A \cup b} + \chi_{A \cap B}$ et $\chi_A \chi_B = \chi_{A \cap B}$, la somme et le produit de deux fonctions étagées sont des fonctions étagées. Les fonctions étagées jouent un rôle important grâce au résultat suivant.

Théoreme 1.5 *Toute fonction mesurable à valeurs dans* $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ *ou* $\mathbb{C}$ *est limite simple d'une suite de fonctions étagées.*

Démonstration
On peut déjà remarquer que le théorème 1.4 entraine que toute limite simple d'une suite de fonctions étagées est mesurable. Réciproquement, si f est mesurable, montrons qu'elle est limite d'une suite de fonctions étagées. Supposons d'abord f à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, montrons que f est alors limite d'une suite croissante de fonctions étagées.
Pour $k = 1, 2, \cdots, n2^n$ définissons

$$A_{n,k} = \left\{ x \in X | \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \ , \ B_n = \{x \in X | f(x) \geq n\}$$

$A_{n,k} \in \mathcal{A}$, $B_n \in \mathcal{A}$ et posons

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{A_{n,k}} + n\chi_{B_n}$$

f_n est étagée et la suite (f_n) est croissante, de plus si $f(x)$ est fini , $f(x) - f_n(x) < 1/2^n$ pour $n > f(x)$ et si $f(x) = +\infty$ on a bien également $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = +\infty$. La suite (f_n) converge donc bien vers f.
Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ on définit $f^+(x) = \sup(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \sup(-f(x), 0)$ qui sont deux fonctions mesurables et telles que $f = f^+ - f^-$. On peut alors appliquer le résultat précédent à f^+ et f^- qui sont positives. Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, on peut considérer Ref et Imf qui sont des fonctions réelles.
Remarque
Si f est mesurable, positive, bornée, on peut construire une suite croissante de fonctions étagées convergeant uniformément vers f.

1.2 MESURES POSITIVES

Définition 1.5 *On appelle mesure positive sur un espace* $(X, \mathcal{A})$ *une application* $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *vérifiant*
1) $\mu(\emptyset) = 0$
2) Si (A_n) *est une suite finie ou dénombrable d'éléments de* $\mathcal{A}$ *deux à deux disjoints*
$\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$. *On exprime cette deuxième propriété en disant qu* μ *est* σ*-additive.*
Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *est appelé espace mesuré.*

Exemple 1
$\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ et $\mu(A) =$ nombre d'éléments de A. Si A est infini $\mu(A) = +\infty$. μ est appelée mesure de décompte sur X.
Exemple 2
On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{A})$ et $a \in X$. Pour $A \in \mathcal{A}$ on définit $\delta_a(A) = 0$ si $a \notin A$, 1 si $a \in A$.

δ_a est une mesure appelée mesure de Dirac sur cet espace.
Exemple 3 : Mesure de Lebesgue sur $I\!R$
C'est une mesure fréquemment utilisée sur $I\!R$. Considérons une partie A quelconque de $I\!R$, on appelle mesure extérieure de A le nombre $m^*(A) = \inf\left(\sum_{i\in I}(b_i - a_i)\right)$ où la famille d'intervalles ouverts $(]a_i, b_i[)_{i\in I}$ est un recouvrement fini ou dénombrable de A. On appelle mesure intérieure de l'ensemble A le nombre $m_*(A) = \sup m^*(K)$ où K est un compact contenu dans A. On a toujours $m_*(A) \leq m^*(A)$. Une partie A de $I\!R$ est dite mesurable si $m_*(A) = m^*(A) < +\infty$. On montre que l'ensemble de ces parties forme une tribu, appelée tribu de Lebesgue et contenant la tribu des Boréliens de $I\!R$. Tout intervalle, tout ouvert, tout fermé de $I\!R$ est donc élément de cette tribu. On note $m(A)$ la valeur commune de $m_*(A)$ et de $m^*(A)$ dans ce cas. m est une mesure sur la tribu de Lebesgue, donc sur la tribu $\mathcal{B}(I\!R)$ et $m(]a,b[) = m([a,b]) = m(]a,b]) = m([a,b[= b - a$. Lorsque A est mesurable, il en est de même pour $A+x$ pour tout $x \in I\!R$ et $m(A+x) = m(A)$, m est invariante par translation.
Remarque
On démontre que certaines parties de $I\!R$ ne sont pas Lebesgue-mesurables, toutefois on ne sait pas en construire explicitement.

Si $\mu(X) < +\infty$ on dit que μ est bornée.
Lorsque X est réunion dénombrable d'ensembles de mesures finies, on dit que μ est σ-finie. C'est le cas de la mesure de Lebesgue sur $I\!R$ car $I\!R = \cup_{n\in I\!N^*}] - n, n[$.
Dans le cas où $\mu(X) = 1$, le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé espace probabilisé et μ est appelée probabilité. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés évènements.

Théoreme 1.6 *On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$.*
1) Si $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.
2) Si (A_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et $A = \cup_n A_n$, $\mu(A) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.
3) Si (A_n) est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et $A = \cap_n A_n$, si un au moins des A_n est de mesure finie, $\mu(A) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

Démonstration
1) $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$
2) En définissant $B_0 = A_0$ et $B_k = A_k - A_{k-1}$, $k \geq 1$ on a $A_n = \cup_{k=1}^n B_k$, les B_k étant deux à deux disjoints $\mu(A_n) = \sum_{k=1}^n \mu(B_k)$,en passant à la limite $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = \sum_{k=1}^\infty \mu(B_k) = \mu(\cup_{k=1}^\infty B_k) = \mu(A)$.
3) En supposant $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, la suite $(A_{n_0} - A_n)_{n>n_0}$ est croissante de limite $A_{n_0} - A$
$\mu(A_{n_0} - A) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_{n_0} - A_n) = \mu(A_{n_0}) - \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.
La première égalité provenant du fait que $A \subset A_{n_0}$.

Définition 1.6 *Une partie N de X est dite μ-négligeable si elle est contenue dans un ensemble mesurable A de mesure nulle.*
Une propriété P est dite vraie presque partout si l'ensemble des points où elle n'est pas vérifiée est négligeable.

Remarque.
N peut ne pas être mesurable, si toutefois toute partie négligeable est mesu-

rable, on dit que la tribu $\mathcal{A}$ est complète pour la mesure μ. La tribu de Lebesgue est complète pour la mesure de Lebesgue, alors que la tribu Borélienne, qui est strictement incluse dans la tribu de Lebesgue, ne l'est pas.

Exemple 4.
Un sous ensemble dénombrable A de $I\!R$ est négligeable.
$A = \{x_n\}$, $\epsilon > 0$ étant fixé, considérons la suite d'intervalles
$I_n =]x_n - \epsilon/2^{n+2}, x_n + \epsilon/2^{n+2}[$.
dont la réunion contient A. $m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon/2^{n+1} = \epsilon$, ceci étant vrai pour tout ϵ on a $m^*(A) = 0$ et donc $m_*(A) = 0$ car $0 \leq m_*(A) \leq m^*(A) = 0$. Ceci montre que A est mesurable, de mesure nulle. L'exemple suivant montre qu'il existe des sous-ensembles non dénombrables de $I\!R$ qui sont négligeables.
Exemple 5.
On considère la suite (J_n) de sous ensembles fermés de $[0,1]$ définie de la façon suivante.
$J_0 = [0,1]$
$J_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$
$J_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$
$\cdots$
C'est une suite décroissante obtenue en enlevant à chaque étape " le tiers du milieu " de chaque intervalle. J_n est une réunion de 2^n intervalles de longueur $1/3^n$. On appelle ensemble triadique de Cantor l'ensemble $C = \cap J_n$.
$m(J_n) = (2/3)^n \Rightarrow m(C) = \lim_{n\to\infty}(J_n) = 0$. C est donc un ensemble négligeable et pourtant il est en bijection avec $[0,1]$ qui n'est pas dénombrable. Construisons cette bijection.
Pour $x \in C$, sa décomposition en base 3 s'écrit
$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/3^n$ où x_n =0 ou 2, en gardant le développement infini lorsqu'il y a deux développements possibles, ce qui est le cas lorsque x est de la forme $u/2^n$. On définit une application $\phi : C \to [0,1]$ de la façon suivante
$y = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n/2^n$ où $y_n = 0$ si $x_n = 0$, $y_n = 1$ si $x_n = 2$. ϕ est une bijection de C sur $[0,1]$ qui montre que C n'est pas dénombrable.

1.3 INTEGRALES DES FONCTIONS MESURABLES

On considère dans la suite un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Définition 1.7 *La fonction étagée positive f étant donnée, $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, on définit son intégrale par*

$$\int f d\mu = \int f(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

Remarques
1) Cette définition suppose les $\alpha_i \neq 0$, si on veut considérer des α_i nuls il faut faire la convention $0 \times \infty = 0$.
2) Les α_i peuvent ne pas être tous différents, il est facile de montrer que l'intégrale de f est indépendante de la partition de X en sous-ensembles A_i.

3) On dit que f est μ-intégrable ou intégrable si $\int f d\mu < +\infty$, c'est le cas si et seulement si $\mu\left([f \neq 0]\right) < +\infty$.

Théoreme 1.7 *On considère deux fonctions étagées positives f et g et un réel $\lambda \geq 0$. On a*
1) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.
2) $\int (\lambda f) d\mu = \lambda \int f d\mu$.
3) Si $f \leq g$, $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Démonstration.
1) $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, $g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$
2) $f + g = \sum_i \sum_j (\alpha_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j}$
$\int (f+g) d\mu = \sum_i \sum_j (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) =$
$\sum_i \alpha_j \sum_j \mu(A_i \cap B_j) + \sum_j \beta_j \sum_i \mu(A_i \cap B_j) =$
$\sum_i \alpha_i \mu(A_i) + \sum_j \beta_j \mu(B_j) = \int f d\mu + \int g d\mu$
Les points 2 et 3 sont immédiats.

Pour une partie mesurable A de X on pose

$$\int_A f d\mu = \int (f.\chi_A) d\mu$$

.

Définition 1.8 *On définit l'intégrale d'une fonction f mesurable positive par*

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int g d\mu | g \text{ étagée positive et } g \leq f \right\} \leq +\infty$$

On dit que f est intégrable si son intégrale est finie.

Remarque
f intégrable $\Rightarrow \mu\left(\{x \in X | f(x) = +\infty\}\right) = 0$ En effet si $A = [f = +\infty]$ on a $n\chi_A \leq f$ donc aussi $n\mu(A) \leq \int f d\mu < +\infty$ ceci n'est réalisé pour tout n que si $\mu(A) = 0$.

Théoreme 1.8 *Les propriétés 1, 2, 3 du théorème 1.7 restent valables pour des fonctions mesurables positives.*

La démonstration de ce théorème necessite d'établir un premier théorème de convergence.

Théoreme 1.9 (Beppo-Levi ou théorème de la convergence monotone) *Si (f_n)est une suite croissante de fonctions mesurables positives, convergeant simplement vers f, on a*

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu$$

Démonstration
On a pour tout n , $f_n \leq f$ donc également $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$ et ceci entraine $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$. Il nous reste à démontrer l'inégalité inverse, il sera nécessaire pour cela d'établir le lemme suivant.

lemme 1.9.1 *On considère une suite croissante d'ensembles mesurables,* (E_n)*, tels que* $\cup_n E_n = X$*,* f *étant une fonction étagée positive on a* $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f d\mu$.

Démonstration du lemme
$f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}$, $\int_{E_n} f d\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap E_n)$
$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f d\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) = \int f d\mu$ car $\lim_{n\to\infty} \mu(A_i \cap E_n) = \mu(A_i)$ d'après le théorème 1.6. Revenons à la démonstration du théorème.
Définissons $E_n = \{x \in X | f_n(x) \geq \lambda\phi(x)\}$ où λ est un réel tel que $0 < \lambda < 1$ et ϕ une fonction étagée telle que $\phi \leq f$.
On a $f_n \geq \lambda\phi\chi_{E_n}$ donc $\int f_n d\mu \geq \lambda \int_{E_n} \phi d\mu$.
La suite E_n étant croissante et $\cup_n E_n = X$, le lemme permet d'écrire

$$\forall\lambda \ , \ 0 < \lambda < 1 \ , \ \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \lambda \int \phi d\mu \ \Rightarrow \ \int \phi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

la fonction étagée $\phi \leq f$ étant arbitraire on a $\int f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.

Ce résultat permet d'établir le théorème 1.8. f et g étant deux fonctions mesurables positives, elles sont limites de suites croissantes de fonctions étagées positives (théorème 1.5) (f_n) et (g_n). D'après le théorème de Beppo-Levi on a $\int (f+g) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (f_n + g_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} (\int f_n d\mu + \int g_n d\mu) =$
$\int f d\mu + \int g d\mu$. Le 2 et le 3 se démontrent de la même manière.

Etudions maintenant une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de f soit nulle

Théoreme 1.10

$$f \ \textit{ étant mesurable positive } \ \int f d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \ \textit{ presque partout}$$

Commençons par démontrer un lemme

lemme 1.10.1 *Une fonction mesurable positive* f *et un réel* $\alpha > 0$ *étant donnés, on a*

$$\mu\left([f \geq \alpha]\right) \leq (1/\alpha) \int f d\mu.$$

Démonstration
On a $f \geq \alpha\chi_{[f\geq\alpha]}$. En intégrant ceci on obtient
$\alpha\mu\left([f \geq \alpha]\right) \leq \int f d\mu$ cette inégalité démontre le lemme. Passons à la démonstration du théorème.
Si $f(x) = 0$ presque partout $\int f d\mu = 0$ car toute fonction étagée positive inférieure ou égale à f a une intégrale nulle.
Réciproquement, si $\int f d\mu = 0$, le lemme permet d'établir que $\mu\left([f \geq 1/n]\right) = 0$ pour tout $n \in I\!N^*$.
On a de plus $[f > 0] = \cup_{n\in I\!N^*} [f \geq 1/n]$ donc $\mu([f > 0]) = 0$.

Corollaire 1.10.1 *Deux fonctions mesurables positives, qui sont presque partout égales, ont même intégrale.*

Démonstration
Définissons les fonctions

$h = \inf(f,g)$, $f_1(x) = \begin{cases} f(x) - h(x) & \text{si} \quad h(x) < +\infty \\ 0 & \text{si} \quad h(x) = +\infty \end{cases}$

$g_1(x) = \begin{cases} g(x) - h(x) & \text{si} \quad h(x) < +\infty \\ 0 & \text{si} \quad h(x) = +\infty \end{cases}$. Le théorème précédent entraine $\int f_1 d\mu = \int g_1 d\mu = 0$ donc $\int f d\mu = \int g d\mu = \int h d\mu$.

Définition 1.9 *Une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ est dite intégrable par rapport à la mesure μ si f^+ et f^- sont intégrables par rapport à la mesure μ. On appelle intégrale de f le nombre $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$.*
Une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite intégrable par rapport à μ si Ref et Imf sont intégrables par rapport à μ et l'intégrale de f est le nombre complexe $\int f d\mu = \int (Ref) d\mu + i \int (Imf) d\mu$.

Remarques
1) Pour une fonction f intégrable, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a
$\mu(\{x \in X | f(x) = +\infty\}) = \mu(\{x \in X | f(x) = -\infty\}) = 0$, autrement dit f est finie presque partout.
2) Si f et g sont deux fonctions intégrables égales presque partout
$\int f d\mu = \int g d\mu$, ceci étant une conséquence du théorème 1.10.

Théoreme 1.11 *L'ensemble des fonctions intégrables réelles (respectivement complexes) est un espace vectoriel réel (respectivement complexe) et $f \to \int f d\mu$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel. Cet espace est noté $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{L}^1(\mathbb{C})$).*

Démonstration
Si f et g sont intégrables, les inégalités
$(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$ et $(f+g)^- \leq f^- + g^-$ entrainent que $f+g$ est intégrable.
On a de plus
$f + g = (f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ ou encore
$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$, on a donc
$\int (f+g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int (f+g)^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu$, ce qui entraine
$\int (f+g)^+ d\mu - \int (f+g)^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu$ ou encore
$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$. On démontre aisément, lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ que le résultat concernant l'intégrale d'une somme reste valable pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Considérons f intégrable et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si $\lambda < 0$, $(\lambda f)^+ = (-\lambda) f^-$ et $(\lambda f)^- = (-\lambda) f^+$
Si $\lambda > 0$, $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$ et $(\lambda f)^- = \lambda f^-$, on a donc
Si $\lambda < 0$, $\int (\lambda f) d\mu = -\lambda \int f^- d\mu + \lambda \int f^+ d\mu = \lambda \int f d\mu$, on établit un résultat analogue pour $\lambda > 0$, de même que pour λ et f complexes en écrivant $f = Ref + iImf$ et $\lambda = a + ib$.

Théoreme 1.12 *Si $f \in \mathcal{L}^1(K)$ alors $|f| \in \mathcal{L}^1(K)$ et*

$$|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu.$$

Démonstration
Ceci est immédiat si $\int f d\mu = 0$. Dans le cas contraire, il existe un nombre complexe α de module 1 tel que $|\int f d\mu| = \alpha \int f d\mu$, ou encore
$|\int f d\mu| = \int (\alpha f) d\mu = \int Re(\alpha f) d\mu$ or $Re(\alpha f) \leq |\alpha f| = |f|$, ceci entraine
$|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$
Ceci permet également d'établir que l'inégalité est une égalité si et seulement si $f = \alpha |f|$ pour un nombre α de module 1.

Critère d'intégrabilité.
La fonction f est intégrable si et seulement si elle est mesurable et majorée en module par une fonction intégrable g

$$\exists g \text{ intégrable telle que } |f| \leq g.$$

Exemple 1.
Intégrable de Lebesgue.
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\int f(x)dx$ l'intégrale de f pour la mesure de Lebesgue m.
On note en général dans ce cas $\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.
Rappel.
Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver deux fonctions en escalier f_1 et f_2 telles que $f_1 \leq f \leq f_2$ et $\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx < \epsilon$ où l'intégrale d'une fonction en escalier est définie comme celle d'une fonction étagée.
On démontre qu'une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$ est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$ et que leurs intégrales sont égales. Démontrons le dans le cas particulier où f est continue et positive sur $[a,b]$, on sait dans ce cas que f est Riemann-intégrable. Une telle fonction est limite uniforme d'une suite croissante de fonctions en escalier, qui est également une suite de fonctions étagées, le théorème de Beppo-levi permet d'écrire

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

où $\int_{[a,b]} f(x)dx$ représente l'intégrale de Lebesgue et $\int_a^b f(x)dx$ représente l'intégrale de Riemann. L'intégrale de Lebesgue est donc bien une généralisation de l'intégrale de Riemann.
Exemple 2.
Si u_n est le terme général d'une série numérique absolument convergente, la somme $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ n'est autre que l'intégrale de la fonction $u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour la mesure de décompte sur $\mathbb{N}$.
Exemple 3
La fonction $x \to \frac{\sin x}{x}$ n'est pas Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car

$$\int_0^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}|dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\frac{\sin x}{x}|dx \geq \sum_{n=0}^{\infty} 2/(n+1)\pi = +\infty$$

1.4 THEOREME DE LEBESGUE-APPLICATIONS

1.4.1 Théorème de Lebesgue

Le théorème de Beppo-Levi était le premier théorème permettant de résoudre le passage à la limite sous le signe $\int$, mais ceci n'était possible que pour des fonctions positives et des suites croissantes. Le théorème de Lebesgue envisage le cas de fonctions intégrables à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Avant de le démontrer, établissons un lemme ayant une importance par lui-même.

Lemme de Fatou

On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et une suite (f_n) quelconque de fonctions mesurables positives. On a

$$\int (\underline{\lim} f_n) d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n d\mu.$$

Démonstration

En posant $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$ la suite (g_n) est une suite croissante de fonctions mesurables positives et $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$. On peut appliquer le théorème de Beppo-Levi à la suite (g_n)

$$\int (\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \leq f_n$

Théoreme 1.13 (Lebesgue ou théorème de la convergence dominée) *On considère une suite (f_n) de fonctions intégrables vérifiant les conditions suivantes*
1) La suite (f_n) converge simplement vers f.
2) Il existe une fonction intégrable g telle que $|f_n| \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Alors f est intégrable et

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Démonstration

On va montrer que $\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| d\mu = 0$ car l'inégalité $| \int f d\mu - \int f_n d\mu| \leq \int |f - f_n| d\mu$ permettra d'obtenir le résultat cherché.
Comme $|f_n| \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $|f| \leq g$ en passant à la limite et f est donc intégrable car f est de plus mesurable en tant que limite d'une suite de fonctions mesurables.
$|f - f_n| \leq 2g \Rightarrow F_n = 2g - |f - f_n| \geq 0$ et on peut appliquer le lemme de Fatou à la suite (F_n).
On a $\underline{\lim}_{n\to\infty} F_n = 2g$ donc $2\int g d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int F_n d\mu = 2\int g d\mu - \overline{\lim}_{n\to\infty} \int |f - f_n| d\mu$ ce qui entraine $\overline{\lim}_{n\to\infty} \int |f - f_n| d\mu = 0$, ce qui démontre le résultat.

Remarques

1) La condition 2 est essentielle. Si $f_n(x) = (1/n)\chi_{[0,n]}(x)$ la suite (f_n) converge simplement vers 0 mais $\int f_n(x)dx = 1$. La conclusion du théorème n'est plus valable car la suite (f_n) n'est majorée par aucune fonction intégrable.
2) L'énoncé reste valable si la condition 1 est remplacée par 1' : La suite (f_n)

est convergente presque partout. Il faut alors prendre pour f une fonction mesurable telle que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pour presque tout x.
3) Dans le cas de l'intégrale de Riemann, on peut établir un résultat beaucoup moins général

Théoreme 1.14 *Si (f_n) est une suite de fonctions Riemann-intégrables, convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$, f est intégrable et*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Exemple 1.
Considérons la suite de fonctions, définies par $f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$, $x \in [0,1]$.
La suite (f_n) converge simplement vers 0, mais la convergence n'est pas uniforme car $f_n'(x) = \frac{n^{3/2}(n^2x^2-1)}{(1+n^2x^2)^2}$ s'annule pour $x = 1/n$ et la fonction f_n admet un maximum dont la valeur est $f_n(1/n) = \sqrt{n}/2$. Toutefois la recherche du maximum de $t \to \frac{t^{3/2}x}{1+t^2x^2}$ pour x fixé, permet d'établir l'inégalité
$\frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} \leq 3^{3/4}/(4\sqrt{x})$, fonction intégrable sur $[0,1]$. Le théorème de Lebesgue peut être appliqué.
$\lim_{n\to\infty} \int \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} = 0$
Exemple 2.
En écrivant $(1+x/n)^n = \exp(n\ln(1+x/n)) = \exp(x - x^2/2n + \cdots)$ pour $x < n$ on obtient

$$\forall x > 0 \ , \ \forall n \in I\!N^* \ , \ (1+x/n)^n e^{-2x} \chi_{[0,n]}(x) \leq e^{-x} \chi_{I\!R^+}(x)$$

Le théorème de Lebesgue permet d'écrire

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1+x/n)^n e^{-2x} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} (1+x/n)^n e^{-2x} \chi_{[0,n]}(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

1.4.2 Application aux intégrales dépendant d'un paramètre

Théoreme 1.15 (de continuité sous le signe somme) *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \times I \to I\!R$ ou $\mathbb{C}$ (où I est un intervalle de $I\!R$) une fonction vérifiant les conditions suivantes.*
1) $\forall \lambda \in I$, lafonction $x \to f(x,\lambda)$ est mesurable.
2) Pour presque tout $x \in X$ la fonction $\lambda \to f(x,\lambda)$ est continue au point $\lambda_0 \in I$.
3)Il existe une fonction intégrable g telle que $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in I$, $|f(x,\lambda)| \leq g(x)$.
Alors la fonction $F : \lambda \to \int f(x,\lambda)d\mu(x)$ est continue au point λ_0

Démonstration
On considère une suite (λ_n) de points de I convergeant vers λ_0. Définissons $\phi_n(x) = f(x,\lambda_n)$, $\phi(x) = f(x,\lambda_0)$. Par continuité de f en λ_0, $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi(x)$, de plus $\forall n \in I\!N$, $\forall x \in X$, $|\phi_n(x)| \leq g(x)$ ce qui entraine, à partir du théorème de Lebesgue $\lim_{n\to\infty} \int \phi_n(x)d\mu(x) = \int \phi(x)d\mu(x)$ ou encore $\lim_{n\to\infty} F(\lambda_n) = F(\lambda_0)$, ce qui montre la continuité de F en λ_0.

Théoreme 1.16 (de dérivation sous le signe somme) *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré I un intervalle ouvert de $I\!R$ et f une fonction réelle ou complexe, définie sur $X \times I$, vérifiant les conditions suivantes.*
1) $\forall \lambda \in I$, la fonction$x \to f(x, \lambda)$ est intégrable.
2) Pour presque tout $x \in X$ la fonction $\lambda \to f(x, \lambda)$ admet une dérivée, notée $f'_\lambda(x, \lambda)$
3) Il existe une fonction g intégrable, telle que pour presque tout x , $\forall \lambda \in I$, $|f'_\lambda(x, \lambda)| \leq g$.
Alors la fonction $F : \lambda \to \int f(x, \lambda)$ est dérivable pour tout $\lambda \in I$ et $F'(\lambda) = \int f'_\lambda(x, \lambda) d\mu(x)$.

Démonstration
On considère $\lambda_0 \in I$ et une suite de réels (h_n) tendant vers 0.
Définissons $\phi_n(x) = \frac{f(x,\lambda_0+h_n)-f(x,\lambda_0)}{h_n}$, $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = f'_\lambda(x, \lambda_0)$ de plus, $|\phi_n(x)| \leq \sup_{\lambda \in I} |f'_\lambda(x, \lambda)| \leq g(x)$ d'après le théorème des accroissements finis. Une application du théorème de Lebesgue entraine

$$\int f'_\lambda(x, \lambda_0) d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(\lambda_0 + h_n) - F(\lambda_0)}{h_n} = F'(\lambda_0)$$

, ce qui démontre la dérivabilité de F en tout point λ de I.
Exemple 3
$F(\lambda) = \int_{I\!R} e^{-x^2} \cos(\lambda x) dx$. Montrons que F est dérivable sur $I\!R$.
$|e^{-x^2} \cos(\lambda x)| \leq e^{-x^2} \Rightarrow f(x, \lambda) = e^{-x^2} \cos(\lambda x)$ est intégrable sur $I\!R$.
$|f'_\lambda(x, \lambda)| = |xe^{-x^2} \sin(\lambda x)| \leq |x|e^{-x^2}$ intégrable sur $I\!R$.
$F'(\lambda) = -\int_{I\!R} xe^{-x^2} \sin(\lambda x) dx = (-\lambda/2)F(\lambda)$ ce résultat est obtenu par une intégration par parties.
On a donc $F(\lambda) = ke^{-\lambda^2/4}$ et $F(o) = \sqrt{\pi}$, on a donc finalement $F(\lambda) = \sqrt{\pi}$.

1.4.3 Application aux séries

Théoreme 1.17 (Corollaire du théorème de Beppo-Levi) *Si (u_n) est une suite de fonctions mesurables, à valeurs dans $\overline{I\!R^+}$, on a*

$$\int \sum_n u_n d\mu = \sum_n \int u_n d\mu \leq +\infty$$

Démonstration
La suit (f_n) définie par $f_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, on peut lui appliquer le théorème de Beppo-levi

$$\int \sum_n u_n d\mu = \lim_n \int f_n d\mu = \lim_n \sum_{k=0}^n \int u_k d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \int u_k d\mu$$

ce qui est le résultat à démontrer.

Théoreme 1.18 (Corollaire du théorème de Lebesgue) *La suite de fonctions (u_n) étant constituée de fonctions intégrables, si $\sum_n \int |u_n| d\mu < +\infty$ alors* *la série $\sum_n u_n(x)$ est absolument convergente pour presque tout x et*

$$\int (\sum_{n=1}^{\infty} u_n) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n d\mu$$

Démonstration
Posons $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| \leq +\infty$. La fonction f est à valeurs dans $\overline{I\!R^+}$, est mesurable et d'après le théorème précédent $\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n d\mu < \infty$. La fonction f étant intégrable, l'ensemble $[f = +\infty]$ est négligeable, appelons E cet ensemble.
Définissons $v_n(x) = u_n(x)$ pour $x \notin E$, $v_n(x) = 0$ pour $x \in E$. La fonction v_n est mesurable car on a modifié u_n uniquement sur un ensemble mesurable et comme $\mu(E) = 0$ on a $u_n(x) = v_n(x)$ pour presque tout $x \in X$. La fonction v_n est donc intégrable et la fonction $V : x \to \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$, définie partout est mesurable et intégrable car on a $|V(x)| \leq f(x)$ partout. On peut appliquer le théorème de Lebesgue à la suite (f_n) définie par $f_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $\forall n \geq 1$, $|f_n| \leq f$ et la suite (f_n) converge presque partout vers V. On peut écrire

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n d\mu = \int V d\mu$$

or $V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ presque partout.

1.5 INTEGRALES IMPROPRES

Dans ce paragraphe on va étudier le lien entre les intégrales convergentes ou semi-convergentes des classes prépas et l'intégrale de Lebesgue. Les fonctions seront définies sur un intervalle non compact de $I\!R$, borné ou non borné. Une fonction est mesurable si elle est Lebesgue-mesurable.

Définition 1.10 *Une fonction réelle ou complexe sur l'intervalle non compact I est dite localement intégrable, si elle est intégrable sur tout intervalle compact de I.*

Il revient au même de dire qu'une telle fonction est mesurable et que l'on a $\int_a^b |f(x)| dx < +\infty$ pour tout inervalle $[a, b] \subset I$.

Théoreme 1.19 *Si f est localement intégrable sur I et si $a \in I$, La fonction $F : x \to \int_a^x f(t)dt$ est continue sur I.*

Démonstration Soit (h_n) une suite de nombre réels, tendant vers 0, telle que $\forall n \in I\!N$, $x + h_n \in I$, où $x \in I$ On peut écrire

$$|F(x + h_n) - F(x)| = |\int_x^{x+h} f(t)dt| \leq \int |f(t)|\chi_n(t)dt$$

où χ_n est la fonction caractéristique de l'intervalle d'extrémité x et $x + h_n$. La suite de fonctions $|f|\chi_n$ converge partout vers 0 et est majorée en module par $|f|$, le théorème de Lebesgue montre alors que $\lim_{n\to\infty} F(x + h_n) = F(x)$, ce qui montre la continuité de F en x.

Définition 1.11 *On considère un intervalle $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. Une fonction f localement intégrable sur I est dite semi-intégrable si la fonction continue $F : x \to \int_a^x f(t)dt$ admet une limite quand x tend vers b. Cette limite est notée $\int_a^b f(t)dt$, même si f n'est pas intégrable au sens de Lebesgue. On dit aussi que l'intégrale de f est convergente.*

On peut donner des définitions analogues concernant les intervalles de la forme $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$. Dans le cas d'un intervalle ouvert $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ on étudie séparément les intervalles $]a, c]$ et $[c, b[$ pour un point c quelconque de $]a, b[$. Dans la suite on considérera seulement des intervalles de la forme $[a, b[$, les autres cas se traitant de la même manière.

Théoreme 1.20 *Toute fonction intégrable sur $[a, b[$ est semi-intégrable.*

Démonstration
Considérons une suite (x_n) de réels convergeant vers b ($\forall n \in I\!N$, $x_n < b$), si la fonction f est intégrable sur $[a, b[$, $f_n = f\chi_{[a,x_n]}$ converge partout vers f et est dominée en module par f. Une application du théorème de Lebesgue à cette suite montre que f est semi-intégrable.

Théoreme 1.21 *Toute fonction semi-intégrable positive sur $[a, b[$ est intégrable.*

On considère cette fois une suite croissante (x_n) convergeant vers b et on applique le théorème de Beppo-Levi à la suite définie par $f_n = f\chi_{[a,x_n]}$.*Ona*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^{x_n} f(t)dt < +\infty$$

Il existe toutefois des fonctions semi-intégrables, de signe non constant, qui ne sont pas intégrables. C'est le cas de la fonction $x \to \frac{\sin x}{x}$ on a vu précédemment que $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}|dx = +\infty$ ce qui signifie que cette fonction n'est pas Lebesgue-intégrable, montrons qu'elle est semi-intégrable sur $[0, +\infty[$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt \ , \ \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}dt$$

or cette deuxième intégrale est convergente, ce qui montre l'existence de la limite et la semi-intégrabilité de la fonction $x \to \frac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
Démontrons deux résultats permettant d'établir la semi-intégrabilité.

Théoreme 1.22 (Critère de Cauchy) *La fonction f, localement intégrable sur $[a, b[$, est semi-intégrable sur cet intervalle si et seulement si quel que soit $\epsilon > 0$ il existe $v \geq a$ tel que pour tout couple de nombres α et β vérifiant $v \leq \alpha < \beta < b$ on ait $|\int_\alpha^\beta f(t)dt| \leq \epsilon$.*

Considérons la fonction $F : x \to \int_a^x f(t)dt$, la condition du théorème s'écrit $|F(\beta) - F(\alpha)| \leq \epsilon$ ce qui exprime précisément que la fonction continue F admet une limite en b.

Théoreme 1.23 (Deuxième théorème de la moyenne) *La fonction f étant positive et décroissante sur l'intervalle $[a,b]$ et la fonction g étant réelle et intégrable sur $[a,b]$, il existe un un réel $\xi \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a^+)\int_a^\xi g(x)dx$$

On va démontrer ce théorème dans le cas simple, mais fréquent, où g est continue et f continument dérivable. Posons $G(x) = \int_a^x g(t)dt$.On intègre alors par parties

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)G(b) - \int_a^b G(x)f'(x)dx.$$

En appelant m et M le minimum et le maximum de la fonction continue G sur $[a,b]$ et en tenant compte de $f \geq 0$ et $f' \leq 0$ on a
$mf(b) \leq f(b)G(b) \leq Mf(b)$ et
$m(f(a) - f(b)) \leq -\int_a^b G(x)f'(x)dx \leq M(f(a) - f(b))$, on obtient en sommant $mf(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mf(a)$ et on conclut à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue G.

Montrons, à l'aide de ce théorème, la semi continuité de $\sin x/x^\alpha$ pour $0 < \alpha \leq 1$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$
$|\int_a^b \frac{\sin x}{x^\alpha}dx| = (1/a^\alpha)|\int_a^\xi \sin x dx| \leq 2/a^\alpha$ ce dernier terme est indépendant de b et tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$, le résultat est alors une conséquence du critère de Cauchy. Il faut remarquer que pour ces valeurs de α la fonction n'est pas intégrable car pour $x \geq 1$ on a $|\sin x|/x^\alpha \geq |\sin x|/x$ et on a vu que cette dernière fonction n'était pas intégrable, par contre pour $1 < \alpha < 2$ la fonction $x \to \sin x/x^\alpha$ est intégrable.

1.6 PRODUIT DE DEUX MESURES.THEOREME DE FUBINI

Dans ce paragraphe on considère deux espaces mesurés, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ et on munit l'espace produit $X \times Y$ de la tribu $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ engendrée par l'ensemble des rectangles $A \times B$ où $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Le but de ce paragraphe est de munir ce nouvel espace mesurable d'une mesure que l'on appellera mesure produit de μ et de ν et que l'on notera $\mu \otimes \nu$. Dans cette partie, les mesures μ et ν seront finies ou σ- finies.
Notations
Si $E \subset X \times Y$ et $x \in X$ on appelle section d'abscisse x et on note E_x l'ensemble $E_x = \{y \in Y | (x,y) \in E\}$, de même on appelle section d'ordonnée $y \in Y$ l'ensemble $E^y = \{x \in X | (x,y) \in E\}$. Une fonction f étant définie sur $X \times Y$, on définit la section d'abscisse $x \in X$ et on note f_x la fonction définie sur Y par $f_x(y) = f(x,y)$, la section d'ordonnée $y \in Y$ est la fonction notée f^y définie sur X par $f^y(x) = f(x,y)$.

Théoreme 1.24 *1)*

$$\forall E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \ , \ E_x \in \mathcal{B} \ et \ E^y \in \mathcal{A}$$

2)

$\forall f : X\times Y \to I\!R$ *ou* $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}-$*mesurable alors* f_x *est* $\mathcal{B}-$*mesurable et* f^y *est* $\mathcal{A}-$*mesurable*

Démonstration
1) On définit $\mathcal{T} = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} | \forall x \in X \ , \ E_x \in \mathcal{B}\}$. Comme $(E_x)^c = (E^c)_x$ et que $(\cup_n E_n)_x = \cup_n (E_n)_x$, $\mathcal{T}$ est une tribu, comme elle contient de plus les rectangles $A \times B$, $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$ on a $\mathcal{T} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. On fait une démonstration identique pour les sections d'ordonnée donnée.
2) L'ensemble F étant un ensemble mesurable de l'ensemble d'arrivée ($I\!R$ ou $\mathbb{C}$), on a $f_x^{-1}(F) = (f^{-1}(F))_x$ qui est donc mesurable d'après ce qui précède. Les applications sections sont donc mesurables si f est mesurable pour la tribu produit.

1.6.1 Produit de deux mesures

On considère dans un premier temps un ensemble X, sur lequel on va définir des classes de sous-ensembles, appelées classes de Dynkin.

Définition 1.12 *1) On appelle π-classe toute classe $\mathcal{P}$ de parties de X telle que A , $B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$.*
2) On appelle λ-classe toute classe $\mathcal{L}$ de parties de X telles que :
- $X \in \mathcal{L}$.
- *$\mathcal{L}$ est stable par différence*
  A , $B \in$, $B \subset A \Rightarrow A - B \in \mathcal{L}$.
- *$\mathcal{L}$ est stable par réunion dénombrable croissante*
  $\forall n \in I\!N$, ; $A_n \in \mathcal{L}$, $A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow A = \cup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$

L'intérêt des π-classes et des λ-classes est relatif aux tribus car une classe $\mathcal{C}$ est une tribu si et seulement si c'est à la fois une π-classe et une λ-classe.

Théoreme 1.25 (Dynkin) *Soit $\mathcal{P}$ une π-classe et $\mathcal{L}$ une λ-classe telles que $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$. La tribu $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ engendrée par $\mathcal{P}$ est contenue dans $\mathcal{L}$*
$\mathcal{P} \subset \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.

Démonstration
Appelons $\mathcal{M}$ la λ-classe engendrée par $\mathcal{P}$, c'est à dire la plus petite λ-classe contenant $\mathcal{P}$. On a $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$, si on démontre que $\mathcal{M}$ est une π-classe ce sera une tribu ce qui entrainera $\mathcal{T}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{L}$. Pour montrer que $A \in \mathcal{M}$ et
$B \in \mathcal{M}. \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$, considérons la classe $\mathcal{D}_A = \{B \subset X | A \cap B \in \mathcal{M}\}$ où $A \in \mathcal{P}$. On vérifie que $\mathcal{D}_A$ est une λ-classe telle que $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}_A$ puisque $\mathcal{P}$ est une π-classe, donc $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}_A$ ce qui démontre
$A \in \mathcal{P}$ et $B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$.
Fixons ensuite $B \in \mathcal{M}$ et considérons la classe $\mathcal{D}_B = \{A \subset X | A \cap B \in \mathcal{M}\}$ qui est également une λ-classe contenant $\mathcal{P}$, donc aussi $\mathcal{M}$, on a donc démontré
A , $B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$. Rappelons qu'on appelle algèbre sur l'ensemble X toute classe $\mathcal{A}$ de parties de X stable par complémentaire et par réunion finie et telle que $X \in \mathcal{A}$.

Théoreme 1.26 (d'unicité) *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur l'ensemble X, si deux mesures μ et ν, σ-finies, définies sur la tribu $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A}$, prennent les mêmes valeurs sur $\mathcal{A}$, alors elles sont égales.*

Démonstration
Supposons d'abord μ et ν bornées et définissons
$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{T}(\mathcal{A}) | \mu(A) = \nu(A)\}$, c'est une λ-classe contenant $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{L} = \mathcal{T}(\mathcal{A})$ et $\mu = \nu$ car $\mathcal{A}$ est une π-classe. Dans le cas où μ et ν sont σ-finies on peut écrire $X = \cup_n A_n$ où (A_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ de mesures finies et on définit
$\mathcal{L}_n = \{A \in \mathcal{T}(\mathcal{A}) | \mu(A \cap A_n) = \nu(A \cap A_n)\}$ qui est une λ-classe contenant $\mathcal{A}$ donc $\mathcal{L}_n = \mathcal{T}(\mathcal{A})$. Pour tout $A \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$ on a $\forall n \in I\!N$, $\mu(A \cap A_n) = \nu(A \cap A_n)$ en faisant n tendre vers l'infini on a $\mu(A) = \nu(A)$.

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés tels que μ et ν soient σ-finies. Comme précédemment on munit $X \times Y$ de la tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Théoreme 1.27 *Il existe une unique mesure γ sur l'espace mesurable $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ telle que*
$\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall B \in \mathcal{B}$ $\gamma(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. Cette mesure est σ-finie, elle est appelée mesure produit de μ et ν et notée $\mu \otimes \nu$

La démonstration de ce théorème nécessite la démonstration préalable de trois lemmes.

lemme 1.27.1 *Soit f une fonction mesurable et positive sur $X \times Y$. La fonction $\psi : y \to \int f^y(x)d\mu(x)$ est $\mathcal{B}$-mesurable et la fonction*
$\phi : x \to \int f_x(y)d\nu(y)$ est $\mathcal{A}$- mesurable.

Démonstration
La fonction f étant mesurable et positive, il existe une suite (f_n) croissante de fonctions étagées convergeant vers f. Appelons $\psi_n(x) = \int f_n^y(x)d\mu(x)$, le théorème de Beppo-Levi entraine que (ψ_n) converge simplement vers ψ, de plus la suite (ψ_n) est croissante. Il suffit de démontrer que ψ_n est $\mathcal{B}$-mesurable pour montrer qu'il en est de même de ψ.
On suppose d'abord μ finie et on pose
$\mathcal{L} = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} | \psi_E : y \to \int (\chi_E)^y(x)d\mu(x)\ \mathcal{B} - \text{mesurable}\}$. L'ensemble
$X \times Y \in \mathcal{L}$, de plus la finitude de μ entraine que $\mathcal{L}$ vérifie $(A, B) \in \mathcal{L}^2$, $B \subset A \Rightarrow A - B \in \mathcal{L}$, le théorème de Beppo-Levi entraine que $\mathcal{L}$ est stable par réunion dénombrable croissante et $\mathcal{L}$ est donc une λ-classe. Montrons que la classe constituée par les rectangles mesurables est contenue dans $\mathcal{L}$. Si $E = A \times B$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, $\psi_E = \mu(A)\chi_B$ donc $E \in \mathcal{L}$. La tribu engendrée par l'ensemble des rectangles mesurable étant $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ on a donc $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{L}$, une fonction étagée étant combinaison linéaire de fonctions ψ_E , $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, les fonction ψ_n sont donc $\mathcal{B}$-mesurables.
Si μ est σ-finie, X est réunion d'une suite croissante d'ensembles $\mathcal{A}$-mesurables A_n tels que $\forall n \in I\!N$, $\mu(A_n) < +\infty$. On pose pour $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $\psi_E^n(y) = \int_{A_n} (\chi_E)^y(x)d\mu(x)$, cette fonction est $\mathcal{B}$-mesurable et définit une suite croissante convergeant vers ψ_E ce qui démontre le résultat pour la fonction ψ, on fait une démonstration analogue pour la fonction ϕ.

lemme 1.27.2 *Les fonctions f et ψ étant celles du lemme 1, on définit $L(f) = \int \psi d\nu$. L vérifie :*

- *$L(0) = 0$*
- *Les fonctions f et g étant $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mesurables et positives, $L(f+g) = L(f) + L(g)$*
- *Si (f_n) est une suite croissante de fonctions $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mesurables convergeant simplement vers f, $\lim_{n\to\infty} L(f_n) = L(f)$.*

Les deux premières propriétés sont immédiates, la troisième résulte du théorème de Beppo-Levi.

lemme 1.27.3 *La fonctionnelle L étant définie comme précédemment, on pose $\gamma(E) = L(\chi_E)$ pour tout $E \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Alors γ est une mesure sur la tribu produit.*

On a $\gamma(\emptyset) = L(0) = 0$ et si (E_n) est une suite d'éléments deux à deux disjoints de la tribu produit, en posant $f_n = \sum_{k=0}^{n} \chi_k$, la suite (f_n) est croissante et converge vers χ_E où $E = \cup_{n=0}^{\infty} E_n$, on a donc $\gamma(E) = \lim_{n\to\infty} L(f_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma(E_n)$ et γ est bien une mesure sur $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$.
Démonstration du théorème
On constate que la mesure γ précédente vérifie $\gamma(A \times B) = L(\chi_B) = \int \psi_B d\nu = \int \mu(A)\chi_B d\nu = \mu(A)\nu(B)$, on a donc construit une mesure vérifiant la condition du théorème, cette condition entraine de plus que γ est σ-finie puisque μ et ν le sont, le théorème d'unicité permet de dire qu'il existe une mesure unique vérifiant cette condition.

Corollaire 1.27.1 *Soit $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, on a*

$$\mu \otimes \nu(E) = \int \mu(E^y) d\nu(y) = \int \nu(E_x) d\mu(x)$$

Démonstration
La première égalité est $\mu \otimes \nu(E) = \int \psi_E d\nu$ déja étudiée, la seconde s'obtient en définissant la mesure $\gamma'(E) = \int \phi_E d\mu$, formule obtenue en permutant les rôles joués par μ et ν. Cette mesure vérifie aussi la condition du théorème, elle coincide donc avec $\mu \otimes \nu$

1.6.2 Théorèmes de Fubini

Théoreme 1.28 (Fubini-Tonelli) *Pour toute fonction $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mesurable et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ on a*

$$\int \left(\int f^y(x) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int \left(\int f_x(y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int f d(\mu \otimes \nu) \leq +\infty$$

Le corollaire montre que ce théorème est vrai pour les fonctions indicatrices d'ensembles mesurables, par linéarité il l'est donc également pour les fonctions étagées positives et le théorème de Beppo-Levi permet d'obtenir le résultat pour les fonctions mesurables positives bornées ou non bornées.
Remarque
Si f est intégrable pour $\mu \otimes \nu$, les intégrales centrales représentent des fonctions intégrables, donc finies presque partout.

Théoreme 1.29 (Fubini) *La fonction f étant intégrable par rapport à $\mu \otimes \nu$, la section f_x est ν-intégrable, la fonction $x \to \int f(x,y)d\nu(y) = \int f_x(y)d\nu(y)$ est définie pour presque tout x et μ-intégrable. On a des résultats analogues en permutant le rôle joué par X et par Y et*

$$\int fd(\mu \otimes \nu) = \int \left(\int f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int \left(\int f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

Dans le cas réel $f = f^+ - f^-$ et on applique le théorème précédent à f^+ et à f^-. Dans le cas complexe, on écrit $f = Ref + iImf$.
Remarque 1
Pour reconnaitre que f est intégrable, il faut montrer que f est mesurable et que $|f|$ est intégrable. On applique dans ce but le théorème de Fubini-Tonnelli à $|f|$.
Remarque 2
Si μ et ν représentent la mesure de décompte sur $I\!N$, qui est σ-finie, le théorème de Fubini montre que si $\sum_m \sum_n |u_{m,n}| < +\infty$ on a $\sum_m \left(\sum_n u_{m,n}\right) = \sum_n \left(\sum_m u_{m,n}\right)$.
Remarque 3 On peut étendre par récurrence les deux théorèmes à n mesures σ-finies.
Remarque 4 Si $f(x,y) = g(x)h(y)$ est $\mu \otimes \nu$-mesurable on a

$$\int fd(\mu \otimes \nu) = \left(\int fd\mu \right) \left(\int gd\nu \right).$$

Exemple 2
La fonction peut également ne pas être intégrable, mais les deux intégrales être néanmoins égales comme le montre cet exemple $\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} |\sin(x^2+y^2)|dx \right] dy = +\infty$ mais les deux intégrales intervenant dans le théorème de Fubini prennent toutes les deux la valeur $\pi/4$.

1.7 THEOREME DU CHANGEMENT DE VARIABLES.

1.7.1 Jacobien d'un difféomorphisme.

Une application ϕ de l'ouvert Δ de $I\!R^n$ vers l'ouvert D de $I\!R^n$ est un homéomorphisme si elle est bijective, continue et si la bijection réciproque est continue, si elle est de plus k fois continuement différentiable, on dit que c'est un difféomorphisme de classe C^k, il est équivalent d'avoir une bijection ϕ continue ainsi que ϕ^{-1} et dont les dérivées partielles existent jusqu'à l'ordre k et sont continues. Dans ce cas pour $\xi \in \Delta$, $\phi'(\xi)$ est représentée par la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_j}(\xi)\right)_{1 \leq i \leq n\ ,\ 1 \leq j \leq n}$ dont le déterminant $J_\phi(\xi)$ est appelé jacobien du difféomorphisme ϕ.

Théoreme 1.30 (du changement de variables.) *On considère un difféomorphisme ϕ de l'ouvert Δ de $I\!R^n$ vers l'ouvert D de $I\!R^n$ et f une fonction borélienne sur D.*
1) Si f est positive on a

$$\int_D f(x)dx = \int_\Delta f(\phi(\xi))|J_\phi(\xi)|d\xi \leq +\infty$$

où on note $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ et $d\xi = d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n$.
2) Si f est réelle ou complexe on a $f \in \mathcal{L}^1(D)$ si et seulement si $(f \circ \phi)|J_\phi| \in \mathcal{L}^1(\Delta)$ et dans ce cas

$$\int_D f(x)dx = \int_\Delta f(\phi(\xi))|J_\phi(\xi)|d\xi.$$

Remarques.
1) Dans le théorème le jacobien intervient par son module, ceci correspond avec la formule élémentaire

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

où f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et ϕ monotone sur cet intervalle.
2) La seconde partie de l'énoncé est déduite de la première en prenant les parties positive et négative de f, puis les parties réelles et imaginaires quand f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.
3) Le théorème de changement de variables peut s'énoncer ainsi : la mesure de Lebesgue sur D est l'image par ϕ de la mesure de densité $|J_\phi|$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur Δ.
Nous admettrons ce théorème dont la démonstration est longue et délicate.

1.7.2 Applications.

Coordonnées polaires dans le plan.
Les formules de changement de variables
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ définissent un difféomorhisme de la demi bande ouverte $\Delta : 0 < r + \infty$, $0 < \theta < 2\pi$ sur le plan privé du demi axe réel positif. $J(r, \theta) = r$ et si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^2$ on a

$$\int\int f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

Dans le cas où f est une fonction radiale, c'est à dire de la forme $f(u) = F(||u||)$ avec $u = (x, y)$, la formule devient

$$\int\int f(x,y)dxdy = 2\pi\int_0^{+\infty} F(r)dr.$$

Coordonnées polaires dans l'espace.
Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ les formules

$$x = r\sin\theta\cos\phi \ , \ y = r\sin\theta\sin\phi \ , \ z = r\cos\theta$$

définissent un difféomorphisme de $\Delta : 0 < r < +\infty$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$ sur l'espace $\mathbb{R}^3$ privé du demi plan fermé $y = 0$, $x > 0$. r est le rayon vecteur du point (x, y, z), θ sa colatitude et ϕ sa longitude. $J(r, \theta, \phi) = r^2\sin\theta$

$$\int\int\int f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

Pour une fonction radiale on obtient $4\pi\int_0^{+\infty} F(r)r^2dr$ où $f(x,y,z) = F(\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1.8 Exercices

Exercice 1

Soit $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ une partition de l'ensemble Ω. Quelle est la plus petite tribu sur Ω contenant les n éléments de la partition. Combien a t-elle d'éléments ?

Exercice 2

Soit A une partie Lebesgue-mesurable de $I\!R$ de mesure finie. Montrer que la fonction

$$f : x \to \mu(A \cap]-\infty, x])$$

est continue pour tout $x \in I\!R$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{I} = \{A \subset I\!R | A \text{ est fini ou dénombrable ou bien } A^c \text{ est fini ou dénombrable } \}$.
1) Montrer que $\mathcal{I}$ est une tribu.
2) Montrer qu'une application

$$f : (I\!R, \mathcal{I}) \to (I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$$

telle qu'il existe $D \subset I\!R$, fini ou dénombrable avec f constante sur D^c est mesurable.

Exercice 4

La notation $[x]$ désignant la partie entière du nombre réel x, calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a^n [nx] \right) dx \ , \ 0 < a < 1.$$

Exercice 5

On appelle f_n la fonction définie par

$$f_n(x) = nx(1-x)^n.$$

A t-on le droit d'écrire

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx?$$

Exercice 6

Démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 - x/n)^n \ln(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x)dx$$

et calculer la valeur de cette deuxième intégrale en fonction de γ, constante d'Euler.
$\gamma = \lim_{n\to\infty} 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots 1/n - \ln n.$

Exercice 7

Soit

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{]0,1]}(x)$$

1) Montrer que ϕ est intégrable sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
2) L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ étant dénombrable, on appelle $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération exhaustive de $\mathbb{Q}$. Soient les fonctions

$$\phi_n(x) = \frac{1}{2^n}\phi(x - r_n)\ ,\ f_n(x) = \sum_{p=1}^{n}\phi_p(x).$$

Montrer qu'il existe une fonction intégrable f telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

3) Montrer que f n'est bornée sur aucun ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Exercice 8

1) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$F(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mu}{1+u^2}du$$

existe et que la fonction F est continue et bornée.
2) Pour tout $k \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on définit la fonction $f_k(x) = F(kx)$. Montrer que

$$f_k(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos kt}{x^2+t^2}dt$$

3) Le nombre k étant fixé, montrer que f_k admet une dérivée première et une dérivée seconde pour tout $x > 0$. (Justifier ces résultats).
4) En utilisant l'égalité

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{t^2+x^2}\right) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{t^2+x^2}\right)$$

établir une relation entre $f_k''(x)$ et $f_k(x)$.
5) Montrer que l'équation différentielle précédente admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}^+$ et satisfaisant $f_k(0) = \pi$.

Exercice 9

1) Montrer que pour tout $p > 0$ l'intégrale

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}dt$$

a un sens. Montrer que pour tout $p > 0$ et tout $x > 0$ on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}y^{p-1}dy = \frac{1}{x^p}\Gamma(p)$$

2) Pour $p \in]0,1[$ et $t \in]0,+\infty[$ montrer que $x \to \frac{\cos x}{x^p}$ est intégrable sur $]0,t[$. En déduire l'égalité

$$A(t) = \int_0^t \frac{\cos x}{x^p} dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} \int_0^t e^{-xy} y^{p-1} \cos x dx dy$$

Donner une justification rigoureuse du théorème utilisé .
3) On considère une suite de réels (t_n) tendant vers $+\infty$ (on pourra supposer $t_n > A > 0$ pour tout n). Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{y^2+1} e^{-t_n y}(y \cos t_n - \sin t_n) dy = 0$$

4) En déduire

$$\lim_{t\to+\infty} A(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} \frac{y^p}{y^2+1} dy$$

5) Sachant que pour $p \in]0,1[$ on a $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos(\frac{p\pi}{2})}$$

Exercice 10

1) On considère une fonction $f \in C^1([a,b])$ décroissante positive et une fonction $g \in C^0([a,b])$ .Montrer qu'il existe $u \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^u g(x)dx$$

2) On considère la suite de fonctions

$$F_n(\lambda) = \int_0^n e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} dt$$

où $\lambda \geq 0$ .En utilisant la question précédente montrer que (F_n) converge uniformément sur $I\!R^+$ en montrant que $|F_{n+p}(\lambda) - F_n(\lambda)| \leq 2/n$.
3) Montrer que F_n est continue sur $I\!R^+$. On appelle F la limite de F_n . Montrer que F est continue sur $I\!R^+$ et dérivable sur $I\!R^*_+$ Calculer $F'(\lambda)$, en déduire $F(\lambda)$ puis la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

Exercice 11

On considère les fonctions

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

Calculer $f'(x) + g'(x)$ puis $f(x) + g(x)$ en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Exercice 12

On considère la fonction définie sur $[0,\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$$

.
1) La fonction f est-elle intégrable sur $[0,\ +\infty[$?
2) Déterminer une série de fonctions $(u_n(x))$ telle que l'on ait

$$\forall x \in]0,\ +\infty[\ ,\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

3) Sachant que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ déterminer la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{\infty} f(x)dx$. Justifier les calculs et préciser les théorèmes employés.

Exercice13

1) On considère $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\int_0^a e^{-xy^2}dx$. Montrer que la fonction $f : (x, y) \to e^{-xy^2}$ est intégrable dans $E = \{(x, y)|0 \leq x \leq a,\ y \geq 0\}$ et que $g : (x, y) \to e^{-xy^2} \sin x$ est intégrable dans le même ensemble.
2) Calculer $I(a, y) = \int_0^a e^{-xy^2} \sin x dx$. Montrer que si (a_n) est une suite de réels positifs tendant vers l'infini, $\int_0^{\infty} I(a_n, y)dy$ a pour limite $I = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^4}dy$ quand $n \to \infty$. Justifier le passage à la limite.
3)En déduire que

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

est convergente.Calculer I et J .
Rappel : $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 14

On pose pour $x > 0$

$$f(x) = \int_0^1 e^{-tx} \frac{\cos t - 1}{t} dt + \int_1^{+\infty} e^{-tx} \frac{\cos t}{t} dt = f_1(x) + f_2(x)$$

1) Montrer que f_1 est continue pour $x \geq 0$ et f_2 pour $x > 0$. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2) On note $g_n(x) = \int_1^n e^{-tx} \frac{\cos t}{t} dt$, montrer que g_n est continue sur $[0, +\infty[$ et que $|g_{n+p}(x) - g_n(x)| \leq 2/n$ (on pourra utiliser sans démonstration le résultat : si f est positive et décroissante sur $[a, b]$ et si g est intégrable sur $[a, b]$, il existe $u \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a) \int_a^u g(t)dt$). En déduire que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ et que g est continue en 0.
3) Montrer que f est dérivable pour $x > 0$ et calculer $f'(x)$.
4) Il résulte du calcul précédent qu'on a

$$(1)\ \ f(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} + g(x) + f(0)$$

où $g'(x)$ puis $g(x)$ seront précisées à l'aide de fonctions élémentaires. En intégrant $\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt$ par parties puis en faisant tendre x vers $+\infty$ dans (1) calculer $f(0)$ en fonction de la constante d'Euler $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln \frac{1}{t} dt (= 0,57..)$.

Exercice 15

Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$$

en l'écrivant comme somme d'une série.

Exercice 16

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(\sqrt{x}) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$$

Exercice 17

Soit $D =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Calculer l'intégrale

$$\iint_D \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dxdy$$

et en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx.$$

Exercice 18

Soit $A =]0, 1[\times]0, 1[\times]0, +\infty[$. calculer l'intégrale

$$\iiint_A \frac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)} dxdydz$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan z}{z} \right)^2 dz.$$

Exercice 19

Soit T le triangle ouvert $x > 0, y > 0, x + y < a$ avec $a > 0$. Calculer l'intégrale

$$\iint_T \frac{3y}{\sqrt{(1+(x+y)^3}} dxdy$$

à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 20

Soit V le tétraèdre ouvert $x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1$. Calculer l'intégrale

$$\iiint_V xyz(1 - x - y - z)dxdydz$$

en effectuant le changement de variable $X = x + y + z, XY = y + z, XYZ = z$.

Chapitre 2

ESPACES DE LEBESGUE

2.1 Inégalités de Hölder et de Minkowski

Définition 2.1 *On dit que les nombres réels positifs p et q sont des exposants conjugués si*
$1/p + 1/q = 1.$

Théoreme 2.1 (Inégalité de Hölder) *On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et deux fonctions f et g mesurables positives (finies ou infinies). On a*

$$\int fgd\mu \leq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q d\mu\right)^{1/q}.$$

Démonstration
L'inégalité est automatiquement satisfaite si l'un des termes du membre de droite est nul ou infini. Montrons que ceci reste vrai dans les autres cas.
On définit les fonctions $F = \frac{f^p}{\int f^p d\mu}$ et $G = \frac{g^q}{\int g^q d\mu}$.
On a $\int F d\mu = 1$ et $\int G d\mu = 1$.
La fonction logarithme étant concave, on a pour $u > 0$, $v > 0$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha \ln u + (1-\alpha) \ln v \leq \ln(\alpha u + (1-\alpha)v)$, cette inégalité entraine $u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha)v$. En appliquant cette inégalité à F et G avec $\alpha = 1/p$ on a $1 - \alpha = 1/q$. On peut écrire

$$\frac{f}{(\int f^p d\mu)^{1/p}} \frac{g}{(\int intg^q)^{1/q}} \leq (1/p)F + (1/q)G$$

En intégrant, l'inégalité devient

$$\frac{\int fgd\mu}{(\int f^p d\mu)^{1/p} (\int g^q d\mu)^{1/q}} \leq 1$$

ce qui démontre l'inégalité de Hölder.

Remarque
L'inégalité de Hölder est une égalité si et seulement si les fonctions f^p et g^q sont proportionnelles presque partout.

Corollaire 2.1.1 (Inégalité de Minkowski.) *Les deux fonctions f et g étant mesurables et positives, définies sur l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, on a*

$$\left(\int (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^q d\mu\right)^{1/p} \quad \textit{où } 1 < p < +\infty.$$

Démonstration.
On écrit $(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$.
Appliquons l'inégalité de Hölder

$$\int f(f+g)^{p-1} d\mu \leq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q}$$

où $1/p + 1/q = 1$. On a de même

$$\int g(f+g)^{p-1} d\mu \leq \left(\int g^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q}$$

Ces deux inégalités entrainent

$$\int (f+g)^p d\mu \leq \left[\left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p d\mu\right)^{1/p}\right] \left[\int (f+g)^p d\mu\right]^{1/q}$$

car $(p-1)q = p$. Le résultat est obtenu en divisant les deux membres de l'inégalité par $(\int (f+g)^p d\mu)^{1/q}$ et en remarquant que $1 - 1/q = 1/p$.

2.2 Espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p.

Définition 2.2 *On appelle $\mathcal{L}^p_\mu(X, K)$ l'ensemble des fonctions mesurables de l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vers $K = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ telles que $\int |f|^p d\mu < +\infty$, $1 \leq p < +\infty$*

Cet ensemble est un espace vectoriel car pour tout scalaire λ et

$$\forall f \in \mathcal{L}^p_\mu(X, K) \ , \ \forall g \in \mathcal{L}^p_\mu(X, K) \ , \ \lambda f \in \mathcal{L}^p_\mu(X, K) \text{ et } f + g \in \mathcal{L}^p_\mu(X, K)$$

le deuxième résultat provenant de l'inégalité $|f+g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$.
Remarque
Il n'existe pas en général de relation d'inclusion entre deux espaces $\mathcal{L}^p$ d'indices p différents.
Sur $]0, +\infty[$ la fonction $f : x \to \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ est dans $\mathcal{L}^1_m(]0, +\infty[)$ mais pas dans $\mathcal{L}^2_m(]0, +\infty[)$, sur le même intervalle la fonction $g : x \to \frac{1}{1+x}$ est dans $\mathcal{L}^2$ mais pas dans $\mathcal{L}^1$.
Il existe cependant deux cas particuliers importants
1) Si la mesure μ est bornée on a $p > q \Rightarrow \mathcal{L}^p_\mu(X, K) \subset \mathcal{L}^q_\mu(X, K)$.
2) Si μ est la mesure de décompte sur $\mathbb{N}$ on a une inclusion inverse entre les deux espaces.
Montrons ces deux résultats.
1) On considère $f \in \mathcal{L}^p_\mu(X, K)$ et $A = [|f| \leq 1]$, $B = [|f| > 1]$. On peut écrire

$f = f\chi_A + f\chi_B$. La fonction $f\chi_A \in \mathcal{L}^q_\mu(X,K)$ car elle est mesurable et bornée. De plus $|f\chi_B|^q \leq |f\chi_B|^p$, Ces deux résultats montrant que $f \in \mathcal{L}^q_\mu(X,K)$.
2) La fonction f appartenant à $\mathcal{L}^q(I\!N)$ on a $\sum_{x\in I\!N}|f(x)|^q < +\infty$, ce qui entraine que $A = [f > 1]$ est un sous ensemble fini de $I\!N$.

$$\sum_{x\in A}|f(x)|^p < +\infty \text{ et } \sum_{x\in I\!N - A}|f(x)|^p \leq \sum_{x\in I\!N - A}|f(x)|^q < +\infty$$

On peut donc conclure que $\mathcal{L}^q(I\!N) \subset \mathcal{L}^p(I\!N)$, la mesure intervenant ici étant la mesure de décompte.

<u>Notation.</u>
On pose, pour une fonction $f \in \mathcal{L}^p_\mu(X,K)$ $||f||_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$.
Avec cette notation, l'inégalité de Hölder s'écrit $||fg||_1 \leq ||f||_p||g||_q$ où $f \in \mathcal{L}^p_\mu(X,K)$ et $g \in \mathcal{L}^q(X,K)$, et l'inégalité de Minkowski s'écrit $||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$, où f et g sont éléments de $\mathcal{L}^p_\mu(X,K)$.
L'inégalité de Hölder montre en particulier

$$f \in \mathcal{L}^p_\mu(X,K)\ ,\ g \in \mathcal{L}^q_\mu(X,K) \Rightarrow fg \in \mathcal{L}^1_\mu(X,K)$$

Théoreme 2.2 *L'application $f \to ||f||_p$ de $\mathcal{L}^p_\mu(X,K)$ vers $I\!R^+$ est une semi-norme.*

<u>Démonstration</u>
Le résultat est une conséquence de l'inégalité de Minkowski. Ce n'est pas une norme car si une fonction est nulle presque partout on a $||f||_p = 0$, c'est pourquoi il est nécessaire de modifier la définition des espaces précédents pour obtenir une norme.
Sur $\mathcal{L}^p_\mu(X,K)$ on définit une relation d'équivalence de la façon suivante

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ pour presque tout } x \Leftrightarrow ||f-g||_p = 0$$

Définition 2.3 *En appelant R la relation d'équivalence précédente, on définit $L^p_\mu(X,K) = \mathcal{L}^p_\mu(X,K)/R$, ensemble des classes d'équivalences dans $\mathcal{L}^p_\mu(X,K)$ pour cette relation d'équivalence.*

Dans cet espace $\dot{f} \to ||\dot{f}||_p = ||f||_p$ est une norme car $||\dot{f}||_p = 0 \Rightarrow \dot{f} = 0$. Ce nouvel espace vectoriel est donc maintenant normé. En pratique on considère en général un représentant d'une classe et non la classe elle-même.

Théoreme 2.3 (Riesz-Fisher) *L'espace vectoriel normé $L^p_\mu(X,K)$,*
$1 \leq p < +\infty$ est complet.

<u>Démonstration</u>
Il suffit de démontrer que $\mathcal{L}^p_\mu(X,K)$ est complet, le résultat étant obtenu en passant aux classes d'équivalence. Rappelons le résultat suivant : un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.
Considérons une suite $(u_n)_{n\in I\!N}$ d'éléments de $\mathcal{L}^p_\mu(X,K)$ telle que $\sum_{n\in I\!N}||u_n||_p < +\infty$.
A partir de l'inégalité $||\sum_{k=0}^n |u_k|\ ||_p \leq \sum_{k=0}^n ||u_k||_p$ le théorème de Beppo-Levi

entraine $|| \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \; ||_p \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||u_k||_p < +\infty$. La série $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k(x)|$ est donc finie presque partout. On définit l'ensemble $E = [f = +\infty]$ et v_n par $v_n(x) = u_n(x)$ pour $x \notin E$ et $v_n(x) = 0$ lorsque $x \in E$. Cette suite vérifie $v_n = u_n$ presque partout et de plus v_n est mesurable. $V(x) = \sum_{n \in I\!N} v_n(x)$ est partout définie et mesurable.

$$||V - \sum_{k=0}^{n} u_k||_p = || \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k||_p \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} ||v_k||_p = \sum_{k=n+1}^{\infty} ||u_k||_p$$

et cette somme tend vers o quand n tend vers l'infini. Ceci démontre donc que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge vers V dans $\mathcal{L}_\mu^p(X, K)$.

Remarque

Dans le cas de l'intégrale de Riemann les espaces étudiés ci-dessus ne seraient pas complets.

2.3 Théorèmes de densité

Nous allons établir deux théorèmes permettant d'approximer, au sens de la norme de L^p, les fonctions intégrables par des fonctions simples en l'occurence des fonctions étagées et des fonctions continues.

Théoreme 2.4 *L'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans* $L_\mu^p(X, K)$, $1 \leq p < +\infty$.

Démonstration.

En appelant E l'ensemble des fonctions étagées intégrables, on a $E \subset L_\mu^p(X, K)$. Considérons dans un premier temps une fonction f positive, élément de $L_\mu^p(X, K)$, il existe une suite croissante (f_n) de fonctions étagées positives convergeant vers f. $\forall n \in I\!N \; f_n \in L^p$ car $0 \leq f_n \leq f$. On a de plus $|f - f_n|^p \leq f^p$, le théorème de Lebesgue entraine $\lim_{n \to \infty} ||f - f_n||_p = 0$, ce qui montre que f est bien limite de la suite (f_n) dans $L_\mu^p(X, K)$. Si la fonction f est de signe quelconque on applique le résultat précédent à f^+ et à f^- et pour une fonction complexe on passe par les parties réelles et imaginaires. On a donc bien $\overline{E} = L_\mu^p(X, K)$.

Corollaire 2.4.1 *L'espace* $C_c^0(I\!R)$ *des fonctions continues à support borné sur* $I\!R$ *est dense dans* $L^p(I\!R)$.

On appelle support d'une fonction définie sur $I\!R$ l'adhérence de l'ensemble $\{x \in I\!R | f(x) \neq 0\}$. C'est le plus petit fermé contenant cet ensemble.

Démonstration.

On voit immédiatement que pour tout p , $1 \leq p < +\infty$ on a $C_c^0(I\!R) \subset L^p(I\!R)$. Montrons que l'on peut approcher dans $L^p(I\!R)$ toute fonction par une fonction continue à support borné. Soit A une partie mesurable dans $I\!R$ avec $m(A) < +\infty$. On démontre l'existence d'un compact K et d'un ouvert U tels que
$K \subset A \subset U$ et $m(U - K) < \epsilon$. La fonction $g : x \to \frac{d(x, V^c)}{d(x, V^c) + d(x, K)}$ est égale à o pour $x \in V^c$ et à 1 pour $x \in K$, cette fonction est continue et

$$||\chi_A - g||_p = \int |\chi_A - g|^p dm \leq \int_{V-K} dm < \epsilon$$

ce qui démontre le résultat, car une fonction étagée est une somme finie de fonctions de la forme $\alpha\chi_A$. La densité de l'ensemble des fonctions étagées dans $L^p(I\!R)$ entraine la densité de l'ensemble $C_c^0(I\!R)$ dans ce même espace.

Corollaire 2.4.2 *L'espace C_c^∞ des fonctions indéfiniment dérivables, à support borné est dense dans $L^p(I\!R)$, $1 \leq p < +\infty$.*

Démonstration.
On considère la fonction $\phi : x \to \exp(\frac{1}{x^2-1})\chi_{]-1,1[}(x)$, cette fonction est continue et indéfiniment dérivable sur $I\!R$ car $\phi^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{n+1}}\exp(\frac{1}{x^2-1})$ où P_n est un polynome de degré n. Définissons la fonction ψ en posant $\psi(x) = A\phi(x)$, où A est choisi tel que $\int A\phi(x)dx = 1$ et la suite de fonctions ρ_n par $\rho_n(x) = n\psi_n(nx)$.
Cette suite de fonctions vérifie
1) $\int \rho_n(x)dx = 1$.
2) Supp $\rho_n =]-1/n, 1/n[$.
Pour une fonction f continue à support borné, posons
$f_n(x) = \int f(t)\rho_n(x-t)dt = \int f(x-t)\rho_n(t)dt$ et montrons que cette suite (f_n) converge uniformément vers f sur $I\!R$. En utilisant la propriété 1 on peut écrire

$$f(x) - f_n(x) = \int (f(x) - f(x-t))\rho_n(t)dt = \int_{-1/n}^{1/n} (f(x) - f(x-t))\rho_n(t)dt$$

les bornes $-1/n$ et $1/n$ étant conséquence de 2. La fonction f étant continue à support borné est uniformément continue
$\forall\epsilon > 0$, $\exists\alpha > 0$, $|t| < \alpha \Rightarrow |f(x-t) - f(x)| < \epsilon$, en choisissant n_0 tel que $1/n < \epsilon$ pour $n > n_0$ on obtient alors $\forall x \in I\!R$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
En utilisant le théorème de dérivation sous le signe somme on démontre que f_n est indéfiniment dérivable, considérons un intervalle $I =]-a, a[$ où a est un réel strictement positif.
1) Pour tout $x \in I$, $t \to f(t)\rho_n(x-t)$ est intégrable.
2) Pour tout $t \in I\!R$, $x \to f(t)\rho_n(x-t)$ est indéfiniment dérivable dans I.
3)

$$\forall x \in I \ , \ \forall t \in I\!R \ , \ |f(t)|\rho_n^{(k)}(x-t) \leq ||\rho_n^{(k)}||_\infty \ |f\chi_{[-a-1/n, a+1/n]}|$$

cette fonction indépendante de x étant intégrable par rapport à t.

2.4 MESURES IMAGES ET MESURES DE BASE DONNEE.

2.4.1 Mesure image.

Définition 2.4 *On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et un espace mesurable $(Y, \mathcal{B})$, h étant une application mesurable de X vers Y, on appelle mesure image de μ par h la mesure notée $\nu = h(\mu)$ définie sur $(Y, \mathcal{B})$ par $\nu(B) = \mu(h^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{B}$.*

Théoreme 2.5 *Pour toute fonction f positive et ν-mesurable sur Y on a*

$$\int_Y f d\nu = \int_X (f \circ h) d\mu$$

Démonstration
Le théorème est vrai pour les fonctions indicatrices d'ensembles χ_B avec $B \in \mathcal{B}$, donc également pour toute fonction étagée, puis pour pour toute fonction mesurable positive en utilisant une suite croissante de fonctions étagées convergeant vers cette fonction.

Corollaire 2.5.1 *Une fonction f réelle ou complexe $\mathcal{B}$-mesurable sur Y est ν-intégrable si et seulement si $f \circ h$ est μ-intégrable et dans ce cas*

$$\int_Y f d\nu = \int_X (f \circ h) d\mu.$$

Démonstration
Le résultat est vrai pour les fonctions positives d'après le théorème précédent, si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ on applique le résultat à f^+ et f^-, si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ on utilise Ref et Imf.

2.4.2 Mesures de base donnée

Définition 2.5 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et g une fonction mesurable positive sur X. On appelle mesure de base (ou de poids) g par rapport à la mesure μ, la fonction d'ensembles définie sur $\mathcal{A}$ par $\nu(E) = \int_E g d\mu$, $E \in \mathcal{A}$.*

La fonction ν est bien une mesure car si les ensembles mesurables A_n sont deux à deux disjoints on obtient

$$\nu(\cup_n E_n) = \int (\chi_{\cup_n E_n}) g d\mu = \int \left(\sum_n \chi_{E_n} \right) g d\mu = \sum_n \int_{E_n} g d\mu = \sum_n \nu(E_n)$$

L'avant dernière égalité est une conséquence du théorème de Beppo-Levi. La mesure ν est notée $\nu = g\mu$.

Théoreme 2.6 *On a pour toute fonction mesurable positive f*

$$\int f d\nu = \int f g d\mu$$

où ν est la mesure de base g par rapport à μ.

La démonstration est similaire à celle du théorème précédent.

Corollaire 2.6.1 *La fonction f est ν-intégrable si et seulement si fg est μ-intégrable et*

$$\int f d\nu = \int f g d\mu$$

Remarque.
Dans le cas d'un ensemble mesurable E tel que $\mu(E) = 0$ on a alors $\nu(E) = 0$. On exprime ceci en disant que ν est absolument continue par rapport à μ.

2.5 Exercices

Exercice 1

Les réels p, q, r étant positifs, montrer que si $1/p + 1/q = 1/r$, on a

$$f \in L^p_\mu(X),\ g \in L^q_\mu(X) \Rightarrow fg \in L^r_\mu(X) \text{ et } ||fg||_r \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Exercice 2

Soit f une fonction réelle positive appartenant à $L^p_\lambda(I\!R^+)$ où $1 < p < +\infty$. On pose

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$$

Montrer que

$$||F||_p \leq \frac{p}{p-1} ||f||_p.$$

Exercice 3

Une fonction réelle mesurable est appelée essentiellement bornée sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A}, \mu)$ si elle est égale presque partout égale à une fonction mesurable bornée. Montrer que si f est essentiellement bornée, $|f|$ admet un plus petit majorant essentiel M où A est un majorant essentiel pour $|f|$ si l'ensemble $\{x \in X | |f(x)| > A\}$ est de mesure nulle. M est notée $||f||_\infty$. Montrer que $||f||_\infty = \lim_{p\to} ||f||_p$. On note $\mathcal{L}^\infty_\mu(X)$ l'ensemble des fonctions mesurables essentiellement bornées.

Exercice 4

R étant la relation d'équivalence "égal presque partout", on définit $L^\infty_\mu(X) = \mathcal{L}^\infty_\mu(X)/R$ ensemble des classes d'équivalences de fonctions essentiellement bornées pour la relation d'équivalence R. Montrer que cet ensemble est un espace vectoriel normé pour la norme $||.||_\infty$ et qu'il est complet. Dans le cas où $X = I\!R$ et μ est la mesure de Lebesgue, quel est l'adhérence dans cet espace de l'ensemble des fonctions continues à support compact ?

Deuxième partie

ESPACES DE HILBERT

Chapitre 3

ESPACES METRIQUES

3.1 Définitions

Un espace métrique est un couple (E, d) où E est un ensemble et d une application de $E \times E$ dans $I\!R^+$ vérifiant :
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $\forall x, y \in E,\ d(x, y) = d(y, x)$.
- $\forall x, y, z \in E,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (Inégalité triangulaire).

Si $x_0 \in E$ et $r \in I\!R^{+*}$ on appelle boule ouverte de centre x_0 et de rayon r, l'ensemble noté $B(x_0, r) = \{x \in E | d(x_0, x) < r\}$.

On appelle ouvert de E toute réunion de boules ouvertes. Unfer mé de E est une partie de E dont le complémentaire est un ouvert.
Remarque : Une partie A de E est ouverte si et seulement si tout $x_0 \in A$ est centre d'une boule ouverte incluse dans A.

3.2 Exemples d'espaces métriques

Exemple 1 :
$E = I\!R,\quad d(x, y) = |x - y|$. Une boule ouverte est dans ce cas un intervalle ouvert. Les trois propriétés d'une distance son aisément vérifiées.

Exemple 2 :
$E = I\!R^2,\quad d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ Pour démontrer l'inégalité triangulaire il suffit d'utiliser l'inégalité
$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}$ avec
$a_i = x_i - y_i,\ \ b_i = y_i - z_i,\ \ i = 1, 2$.
Les boules ouvertes de cet espace sont les disques ouverts. On peut définir sur cet ensemble d'autres métriques.
$d_1(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ dont les boules ouvertes sont formés de l'intérieur des carrés de cotés parallèles aux axes.
$d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ dont les boules ouvertes sont formés de l'intérieur des carrés dont les diagonales sont parallèles aux axes.

3.3 Propriétés.

Théoreme 3.1 *Un espace métrique E est séparé, ce qui signifie que si x et y sont des points distincts de E, il existe des boules ouvertes contenant x et y respectivement et d'intersection vide.*

Démonstration
La distance $r = d(x, y) > 0$ car $x \neq y$. Les boules $B_x = B(x, r/4)$ et $B_y = B(y, r/4)$ sont telles que $B_x \cap B_y = \emptyset$ et elles contiennent respectivement x et y.

Définition 3.1 *Un point $\lambda \in E$ est un point d'accumulation d'une partie $A \subset E$ si toute boule ouverte de centre λ contient au moins un point de A différent de λ.*

Exemple

Si $E = I\!R$ et si $d(x, y) = |x - y|$, 0 est point d'accumulation de $A = \{1, 1/2, 1/3, \cdots\}$ mais aussi de $A' = A \cup \{0\}$. Ce qui montre qu'un point d'accumulation peut appartenir ou non à l'ensemble.

Théoreme 3.2 *Un ensemble $A \subset E$ est fermé si et seulement si il contient tous ses points d'accumulation.*

Démonstration
Dans le cas où $x \in E - A$qui est un ouvert, il existe une boule $B(x, \epsilon)$ incluse dans $E - A$, x ne peut donc être un point d'accumulation de A.
Réciproquement, si A contient tous ses points d'accumulation et si $x \in E - A$, il existe une boule ouverte de centre x ne contenant ancun point de A. $E - A$ est donc ouvert et A est fermé.

Définition 3.2 *On appelle fermeture ou adhérence de $A \subset E$ l'ensemble $\overline{A} = A \cup A_a$ où A_a est l'ensemble des points d'accumulation de A. C'est donc le plus petit fermé contenant A.*

Remarque : A est fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

3.4 Espaces métriques complets

Définition 3.3
- *Une suite (x_n) de points de l'espace métrique converge vers $x \in E$ si*
$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0.$$
- *Une suite (x_n) est de Cauchy si*
$$lim_{n,m \to \infty} d(x_n, x_m) = 0.$$
- *un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy de E converge.*

Remarques
1) Une partie $A \subset E$ est fermée si et seulement si elle contient les limites de ses suites convergentes.
2) $(I\!R, |.|)$ est complet mais $Q\!\!\!\!I$ muni de la même distance ne l'est pas. La première affirmation provient de la construction même de $I\!R$. Pour montrer la deuxième notons x_n la représentation décimale par défaut de $\sqrt{2}$ contenant n décimales, c'est une suite de $Q\!\!\!\!I$, mais la limite $\sqrt{2} \notin Q\!\!\!\!I$ (c'est une suite de Cauchy convergeant dans $I\!R$ mais pas dans $Q\!\!\!\!I$).

3.5 Espaces vectoriels normés

Dans la suite le corps de base des espaces vectoriel considérés est noté K. Il s'agira de $I\!R$ ou $C\!\!\!\!I$.

Définition 3.4 *Un espace vectoriel E est normé s'il est muni d'une application*

$$||.|| : E \to I\!R^+$$

vérifiant

— $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
— $\forall \lambda \in K$, $\forall x \in E$ $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$.
— $\forall x, y \ \in E$ $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Il en découle immédiatement que $d(x, y) = ||x - y||$ définit une distance sur E.

Exemples
a) $E = I\!R^n$, $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ est un $I\!R$-espace vectoriel.
b) $E = C([a, b])$ (fonctions réelles ou complexes continues sur l'intervalle $[a, b]$) $||f|| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.
Une suite (f_n) converge alors vers f pour la distance d associée à $||.||$ si et seulement si (f_n) converge uniformément vers f.
c) $E = C\!\!\!\!I^n$, $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ est un $C\!\!\!\!I$-espace vectoriel normé.
d) $E = \left\{ (x_n)_{n \in I\!N} \mid \sum_{n \in I\!N} |x_n|^2 < +\infty \right\}$ où $x_n \in K$ pour tout n est un K-espace vectoriel normé pour la norme

$$N_2(x) = (\sum_{n \in I\!N} |x_n|^2)^{1/2}.$$

Remarque.
En notant μ la mesure de décompte sur $I\!N$ et $x = (x_n)$ on a

$$N_2(x) = (\int_{I\!N} |x|^2 d\mu)^{1/2}$$

cet espace est donc un espace de Riesz particulier étudié dans le cours d'intégration, il est noté $l^2(K)$.

3.6 Espaces vectoriels normés complets

Définition 3.5 *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.*

Exemples.
a) $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets pour la norme précisée précédemment. Ceci provient du fait que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets et qu'une suite de terme général $x_k = (x_k^1, x_k^2, \cdots, x_k^n)$ converge vers $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dans K^n si et seulement si pour tout i x_k^i converge vers x_i.
b) L'espace $l^2(K)$ est complet. Ceci a été démontré dans le cours d'intégration (tous les espaces L^p sont complets). Cet exemple est très important car cet espace est isomorphe à tous les espaces de Hilbert que l'on traitera dans ce cours.
c) L'espace $(X, \mathcal{B}, \mu)$ étant un espace mesuré ($\mathcal{B}$ est une tribu sur X, μ une mesure sur cet espace) on définit

$$L^p_\mu(X) = \left\{ f : X \to K \mid \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}.$$

Tous ces espaces correspondants à $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ sont des espaces de Banach (voir cours d'intégration). L'exemple précédent est un cas particulier où $X = \mathbb{N}$.

3.7 Applications linéaires continues

Rappel.

— Les espaces (E, d) et (F, δ) étant métriques et f une application de E vers F, on dit que f est continue en $a \in E$ si

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ , \ \forall x \in E \ , \ d(x, a) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

f est continue sur E si elle est continue en tout point de E. Il revient au même de dire que l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert (ou l'image réciproque de tout fermé est un fermé).

— On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x, y \in E \ , \ \delta(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Une application lipschitzienne est continue sur E.

— Une application f est continue en $a \in A$ si et seulement si pour toute suite (x_n) convergeant vers a dans (E, d), la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$ dans (F, δ).
Dans la suite E et F seron deux espaces vectoriels normés, munis des distances associées à ces normes, qui seront toutes deux notées $||.||$.

Théoreme 3.3 *Soit u une application linéaire de E dans F, les trois propriétés suivantes sont équivalentes*
1) u est continue en o.
2) u est bornée sur toute partie bornée de E.

3) u est lipschitzienne.

<u>Démonstration</u>
(1) $\Rightarrow$ (2) : Si u est continue en 0, il existe $r > 0$ tel que $||x|| \leq r \Rightarrow ||u(x)|| \leq 1$. u est donc bornée sur la boule $B(0,r)$ donc par homothétie sur toute boule de centre 0 et donc sur toute partie bornée de E.
(2) $\Rightarrow$ (3) : Si (2) est vérifiée on a $||x|| = 1 \Rightarrow ||u(x)|| \leq M$.
Si $x \neq 0$, $||u(x/||x||)|| \leq M \Rightarrow ||u(x)|| \leq M||x||$ et ceci est vérifié si $x = 0$. On a alors $||u(x) - u(y)|| = ||u(x-y)|| \leq M||x-y||$ et u est bien lipschitzienne.
(3) $\Rightarrow$ (1) est immédiat.

<u>Remarque.</u> Soit u une application linéaire de E vers F, la plus petite constante de Lipschtiz associée à E est le nombre

$$||u|| = \sup_{x=0} \frac{||u(x)||}{||x||} = \sup_{||x|| \leq 1} ||u(x)|| = \sup_{||x||=1} ||u(x)||.$$

Ce nombre est appelé norme de u. On a donc
$||u(x)|| \leq ||u||\,||x||$, le signe $||.||$ ayant trois significations différentes dans cette inégalité.

Théoreme 3.4 *L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F est normé par $u \to ||u||$. Si F est complet $\mathcal{L}(E,F)$ est complet pour la norme qui vient d'être définie.*

<u>Démonstration</u> Soient $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$

$$||u+v|| = \sup_{||x||=1} ||u(x)+v(x)|| \leq \sup_{||x||=1} ||u(x)|| + \sup_{||x||=1} ||v(x)|| = ||u|| + ||v||$$

Pour $\lambda \in K$, on a immédiatement $||\lambda u|| = |\lambda|\,||u||$
$||u|| = 0 \Rightarrow \forall x \in E \;\; u(x) = 0$ c'est à dire $u = 0$.
L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est donc bien normé à l'aide de l'application définie plus haut.
Supposons F complet et considérons une suite de Cauchy (u_n) dans $\mathcal{L}(E,F)$.
L'inégalité (1) $||u_p(x) - u_q(x)|| \leq ||u_p - u_q||\,||x||$ entraine que $(u_n(x))$ est une suite de cauchy dans F pour tout $x \in E$, elle converge donc vers un élément de F que l'on notera $u(x)$.

$$u(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} u_n(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} (\lambda u_n(x) + \mu u_n(y)) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

u est donc bien linéaire, montrons qu'elle est continue.
Soit $\epsilon > 0$ et choisissons $n \in \mathbb{N}$ tel que $p, q \geq n \Rightarrow ||u_p - u_q|| \leq \epsilon$
en faisant tendre q vers l'infini (1) donne $||u_p(x) - u(x)|| \leq \epsilon||x||$, $u_p - u$ est donc Lipschitzienne, donc continue et $u = (u - u_p) + u_p$ est continue.
$||u_p - u_q|| \leq \epsilon \Rightarrow ||u_p - u|| \leq \epsilon$ $(q \to \infty)$, ce qui exprime que $\lim_{p\to\infty} u_p = u$ dans $\mathcal{L}(E,F)$ qui est donc complet.

<u>Remarque.</u>
a) Si $E = F$, $\mathcal{L}(E,F)$ est noté $\mathcal{L}(E)$ et on a $||u \circ v|| \leq ||u||\,||v||$.
b) Si $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathcal{L}(E,F)$ est appelé dual topologique de E et noté E^*. C'est un espace vectoriel normé complet.

Définition 3.6 *Les espaces vectoriels E et F étant normés, l'application linéaire $u : E \to F$ est un isomorphisme d'espaces normés si elle est bijective et bicontinue, c'est à dire que u et u^{-1} sont continues.*

Théoreme 3.5 *L'application linéaire bijective u est un isomorphime si et seulement il existe deux réels strictement positifs A et B tels que*

$$\forall x \in E \; A||x|| \leq ||u(x)|| \leq b||x||.$$

La première inégalité est équivalente à la continuité de u^{-1} et la deuxième à la continuité de u.

Remarque.
L'espace vectoriel E étant muni des deux normes $||.||_1$ et $||.||_2$, elles donnent les mêmes ouverts (on dit que les topologies sont identiques) si et seulement si l'application identité $Id : (E, ||.||_1) \to (E, ||.||_2)$ est un isomorphisme l'image réciproque d'un ouvert (par Id ou par $Id^{-1} = Id$) étant alors un ouvert.

Corollaire 3.5.1 *$Id : (E, ||.||_1 \to (E, ||.||_2)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés si et seulement si les normes sont équivalentes c'est à dire si elles vérifient*

$$\forall x \in E \;,\; A\,||x||_1 \leq ||x||_2 \leq B\,||x||_1$$

Ce résultat est une conséquence immédiate du résultat précédent.

Théoreme 3.6 *Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes, ce qui entraine qu'un tel espace n'a qu'une seule topologie.*

Démontrons d'abord un lemme préliminaire.

lemme 3.6.1 *L'espace vectoriel K^n étant muni de la norme définie par $p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots |x_n|^2}$, toute autre norme sur cet espace est continue pour p.*

Démonstration
Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de K^n et $x \in K^n$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ Si $||.||$ est une norme quelconque sur K^n

$$||x|| = ||\sum_{i=1}^n x_i e_i|| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\,||e_i|| \leq A\,p(x) \text{ où } A = \left(\sum_{i=1}^n ||e_i||^2)\right)^{1/2}$$

$||.||$ est donc continue en 0. L'inégalité $|\,||x|| - ||a||\,| \leq ||x - a||$ entraine la continuité en tout point a.

Démontrons maintenant le théorème. Appelons q et r deux normes sur K^n, elles sont continues par rapport à p. Sur $S = \{x \in K^n | p(x) = 1\}$, sphère unité de K^n, q et r ne s'annulent pas, S étant compacte (fermée et bornée) r/q a un maximum et un minimum sur S

$$\forall x \in S \;,\; \exists (A, B) \in I\!R^2 \;\; A \leq \frac{r(x)}{q(x)} \leq B \Leftrightarrow Aq(x) \leq r(x) \leq Bq(x)$$

Ces inégalités se généralisent à K^n, ce qui montre que sur K^n toutes les normes sont équivalentes. Considérons un espace vectoriel E quelconque de dimension n sur K et appelons f un isomorphisme algébrique de K^n sur E (toute application linéaire envoyant la base canonique de K^n sur une base de E est un tel isomorphisme algébrique). Dans le cas où q et r sont deux normes sur E, $q \circ f$ et $r \circ f$ sont des normes sur K^n et à l'aide de ce qui précède

$$\forall x \in K^n \ , \ Aq\left(f(x)\right) \leq r\left(f(x)\right) \leq Bq\left(f(x)\right)$$

or $f(x)$ est un vecteur quelconque de E, ce qui montre que q et r sont équivalentes.
Remarque. Ceci est faux en dimension infinie.
Soit $E = C[0,1], I\!R)$, $||f||_u = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$, $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. La suite de fonctions définie par $f_n(t) = t^n$ vérifie $||f_n||_u = 1$ et $||f_n||_1 = 1/(n+1)$. Il est façile de montrer que $||f||_1 \leq ||f||_u$ pour tout $f \in E$, mais il n'est pas possible de trouver une constante une contante k telle que $\forall f \in E$, $||f||_u \leq k||f||_1$ car $\frac{||f_n||_u}{||f_n||_1} = n+1$ et ce quotient n'est pas borné.

Théoreme 3.7 *Tout espace normé de dimension n est isomorphe à K^n, il est donc complet.*

Démonstration
Soit $f : K^n \to E$ un isomorphisme algébrique. Si q est la norme sur E, $r = q \circ f$ est une norme sur K^n, elle est donc équivalente à la norme euclidienne p

$$\forall x \in K^n \ , \ Ap(x) \leq q(f(x)) \leq Bp(x)$$

f est donc non seulement un isomrphisme algébrique mais aussi un isomorphisme d'espace normé.

Théoreme 3.8 *Toute application linéaire f d'un espace vectoriel E de dimension finie n vers un espace vectoriel quelconque F est continue.*

Démonstration
Soit $f : K^n \to E$ un isomorphisme et $g : E \to F$une application linéaire. On pose $h = g \circ f$, $h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i h(e_i)$

$$||h(x_1, x_2, \cdots, x_n)|| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \, ||h(e_i)|| \leq \left(\sum_{i=1}^n ||h(e_i)||^2\right)^{1/2} p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

ce qui entraine la continuité de h et donc également la continuité de $g = h \circ f^{-1}$.

Chapitre 4

Espaces de Hilbert

4.1 Formes Hermitiennes

Dans toute la suite on prendra $K = \mathbb{C}$.

Définition 4.1 — *E et F étant deux espaces vectoriels complexes, une application $u : E \to F$ est dite semi-linéaire si*

$$\forall x, y \in E \;\; u(x+y) = u(x) + u(y) \;,\; \forall \lambda \in \mathbb{C} \;,\; \forall x \in E \;\; u(\lambda x) = \overline{\lambda} u(x).$$

— *E, F, G étant trois espaces vectoriels complexes, une application $u : E \times F \to G$ est dite sesquilinéaire si $x \to u(x,y)$ est linéaire et $y \to u(x,y)$ est semi-linéaire. Si $G = \mathbb{C}$ u est une forme sesquilinéaire.*

— *Une forme sesquilinéaire sur l'espace vectoriel complexe $E \times E$ est hermitienne si $\forall x, y \in E \;\; f(y,x) = \overline{f(x,y)}$. Dans le cas $K = \mathbb{R}$ l'analogue des formes hermitiennes sont les formes bilinéaires symétriques.*

Exemples

1) Sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ la forme hermitienne la plus générale s'exprime à l'aide des coordonnées x_i et y_i par

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i \overline{y_j} \;,\; \alpha_{ij} = f(e_i, e_j) \in \mathbb{C}.$$

f est hermitienne si et seulement si $\alpha_{ji} = \overline{\alpha}_{ij} \;\; i,j = 1,2,\cdots,n$. Dans ce cas on dit que la matrice $A = (\alpha_{ij})_{i,j}$ est hermitienne.

2) On peut munir l'espace

$$l^2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | \forall n x_n \in \mathbb{C} \;,\; \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$$

de la forme hermitienne définie par $f((x_n),(y_n)) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \overline{y_i}$. Cette série est bien définie sur l^2 car $|x_i \overline{y_i}| \leq 1/2(|x_i^2| + |y_i^2|)$. Il est alors façile de vérifier que f est une forme hermitienne.

3) Sur $E = C([0,1], \mathbb{C})$ la forme définie par

$$f(x,y) = \int_0^1 x(t) \overline{y(t)} dt$$

est hermitienne.
4) $E = L^2_\mu(X)$ où $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et E l'espace vectoriel constitué des classes d'équivalence des fonctions mesurables de carré intégrable, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $f, g \in E$, l'application $\phi(f, g) = \int_X f.\overline{g} d\mu$ est une forme hermitienne sur E, l'intégrale étant bien définie d'après l'inégalité de Hölder.

Théoreme 4.1 *Soit f une forme sesquilinéaire sur E, on a*

$$(1)\ \ f(x,y) = \frac{1}{4}\left(f(x+y,x+y) - f(x-y,x-y) + if(x+iy,x+iy) - f(x-iy,x-iy)\right)$$

Démonstration
$f(x+y,x+y) = f(x,x) + f(y,y) + f(x,y) + f(y,x)$
$f(x+iy,x+iy) = f(x,x) + f(y,y) - if(x,y) + if(y,x)$
En remplaçant y par $-y$ dans ces expressions et en effectuant les opérations précisées on obtient le résultat.
f est donc déterminée par les valeurs prises sur la diagonale.

Corollaire 4.1.1 *Une forme sesquilinéaire est hermitenne si et seulement si elle prend des valeurs réelles sur la diagonale de $E \times E$.*

Si f est hermitienne on a $f(x,x) = \overline{f(x,x)} \in \mathbb{R}$.
Réciproquement la formule (1) s'écrit $f(x,y) = 1/4(A - B + iC - iD)$ où $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, donc $f(y,x) = \overline{f(x,y)}$.

Définition 4.2 *Une forme hermitienne est définie positive si $\forall x \in E, x \neq 0\ \ f(x,x) > 0$.*

Théoreme 4.2 *Si f est une forme hermitienne définie positive sur E on a*

$$\forall (x,y) \in E \times E\ ,\ |f(x,y)|^2 \leq f(x,x)\, f(y,y)$$

,c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Démonstration
Si $x = y = 0$, l'inégalité est immédiate. Supposons par exemple $f(x,y) = a >\ 0$ $(x \neq 0)$. Posons $f(x,y) = b\ ,\ f(y,y) = c$.

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}\ ,\ f(x+\lambda y, x+\lambda y) = a\lambda\overline{\lambda} + b\lambda + \overline{b\lambda} + c = a\left[|\lambda + \overline{b}/a|^2 + \frac{ac - |b|^2}{a^2}\right] \geq 0$$

La valeur $\lambda = -\overline{b}/a$ entraîne $ac - |b|^2 \geq 0$, ce qui est l'inégalité à démontrer.

Théoreme 4.3 *L'inégalité ci-dessus devient une égalité si et seulement si x et y sont linéairement indépendants.*

Démonstration
Si $\lambda x + y = 0\ ,\ f(\lambda x + y, \lambda x + y) = 0 \Rightarrow |b|^2 = ac$.
Réciproquement si $|b|^2 = ac$ dans le cas $a = 0$ on a $x = 0$ et si $a > 0$
$f(\lambda x + y, \lambda x + y) = a|\lambda + \overline{b}/a|^2$ ce qui entraine $\lambda x + y = 0$ si $\lambda = -\overline{b}/a$.

Corollaire 4.3.1 *Si f est une forme hermitienne définie positive sur $E \times E$, l'application $p : x \to \sqrt{f(x,x)}$ est une norme sur E.*

Démonstration

- $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.
- $p^2(x+y) = f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(y,y) + 2\Re(f(x,y))$
  $\geq p^2(x) + p^2(y) + 2p(x)p(y) = (p(x) + p(y))^2$
  d'où $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

4.2 Espaces de Hilbert

Définition 4.3 *Un espace de Hilbert (ou espace Hilbertien) est un espace vectoriel complexe muni d'une forme hermitienne définie positive et complet pour la norme associée à cette forme.*
Cette forme définie sur E (on dit aussi produit scalaire) sera notée $(x|y)$ et la norme associée $||x||$.

Avec ces notations on obtient

$$|(x|y]| \leq ||x|| \, ||y|| \text{ (Inégalité de Cauchy-Schwarz) et}$$

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2\right)$$

Exemples. 1) l^2 est un espace de Hilbert associé au produit scalaire

$$(x|y) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

où $x = (x_i)_{i \in I\!N}$, $y = (y_i)_{i \in I\!N} \in l^2$.
2) L'espace $C([0,1], \mathbb{C})$ peut être muni de la forme hermitienne défine positive

$$(x|y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$$

mais il n'est pas complet pour la norme associée.
Posons $x_n(t) = \sin(\pi/t)$ pour $1/n \leq t \leq 1$, $x_n(t) = 0$ pour $0 \leq t \leq 1/n$

$$||x_n - x_m||^2 = \int_{1/n}^{1/m} \sin(\pi/t)dt \ (n > m) \ , \ \lim_{n,m \to \infty} ||x_n - x_m||^2 = 0$$

Ceci montre que (x_n) est une suite de Cauchy dans cet espace. Si elle admettait une limite $x \in E$ on aurait pour $a > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^1 |x(t) - x_n(t)|^2 dt = \int_a^1 |x(t) - \sin(\pi/t)|^2 dt = 0$$

ce qui entrainerait $x(t) = \sin(\pi/t)$ pour $0 < a \leq t \leq 1$ car $x(t) - \sin(\pi/t)$ est continue, d'où $x(t) = \sin(\pi/t)$ pour $0 < t \leq 1$ or une telle fonction ne peut être continue en 0 quelle que soit la valeur prise par $x(0)$.
3) $E = L^2_\mu(X)$ muni du produit scalaire $(f|g) = \int_X f\overline{g}d\mu$ est un espace de Hilbert. La norme $||.||_2$ en fait un espace vectoriel normé complet (cours d'intégration).

Théoreme 4.4 *Dans un espace de Hilbert on a les relations suivantes*

— $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\Re(x|y)$

— $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$. *Identité du parallélogramme.*

— $||x||^2 + ||y||^2 = 2||\frac{x+y}{2}||^2 + \frac{1}{2}||x-y||^2$. *Théorème de la médiane.*

La vérification est immédiate.
Notons que si $(x|y) = 0$ la première relation est le théorème de Pythagore, mais la réciproque n'est vraie que si l'espace vectoriel est réel.

4.3 Théorème de projection

Définition 4.4 — *Soit F une partie d'un espace de Hilbert E et $a \in E$. On appelle projection de a sur F le point $\alpha \in F$ (s'il existe) tel que*

$$||a - \alpha|| = \inf_{x \in F} ||a - x||.$$

C'est le point réalisant le minimum de la distance de a à F (si ce point existe et dans ce cas il peut y en avoir plusieurs).

— *Une partie F d'un espace vectoriel E est convexe si lorsqu'elle contient deux points elle contient le segment joignant ces deux points, où le segment $[a, b]$ est l'ensemble des points $\{x \in E | x = \alpha a + (1-\alpha)b\ ,\ 0 \leq \alpha \leq 1\}$*

Théoreme 4.5 *Soit E un espace Hilbertien et F une partie fermée convexe non vide de E. Chaque point de E a une projection unique sur F.*

Démonstration
On pose $d = \inf_{x \in F} ||a - x||$. Les propriétés de la bornes inférieure entraine l'existence d'une suite (x_n) de points de F telle que $\lim_{n\to\infty} ||a - x_n|| = d$. En appliquant le théorème de la médiane à $x = a - x_n$ et $y = a - x_m$ on obtient

$$(1)\ ||a - x_n||^2 + ||a - x_m||^2 = 2||a - \frac{x_n + x_m}{2}||^2 + 1/2||x_n - x_m||^2$$

$\lim_{n\to\infty} ||a - x_n||^2 = \lim_{m\to\infty} ||a - x_m||^2 = d^2$, F étant convexe $\frac{x_n + x_m}{2} \in F$. La définition de d entraine $||a - \frac{x_n + x_m}{2}|| \geq d$. On a $\limsup_{n,m\to\infty} ||x_n - x_m|| \leq 0$ ce qui donne $\lim_{n,m\to\infty} ||x_n - x_m|| = 0$. La suite (x_n) est donc une suite de Cauchy de F, E étant complet, elle converge vers un élément $\alpha \in E$ et F étant fermé $\alpha \in F$. Ceci montre l'existence d'un point $\alpha \in F$ vérifiant $d = ||a - \alpha||$, α est donc bien une projection de a sur F.
S'il existait une autre projection β on pourrait écrire

$$||\beta - \alpha||^2 = 2||\beta - a||^2 + 2||\alpha - a||^2 - 4||a - \frac{\alpha + \beta}{2}||^2$$

d'où $||\beta - \alpha||^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 \leq 0 \Rightarrow ||\beta - \alpha|| = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$.

Théoreme 4.6 (Caractérisation de la projection) *Soit F partie fermée convexe non vide de l'espace de Hilbert E, et $a \in E$ on a*

$$\alpha \text{ est la projection de } a \text{ sur } F \Leftrightarrow \forall x \in F\ ,\ \Re(a - \alpha | x - \alpha) \leq 0$$

Démonstration
Si $\Re(a-\alpha|x-\alpha) \leq 0$ pour $x \in F$ on a

$$||a-x||^2 = ||a-\alpha||^2 + ||x-\alpha||^2 - 2\Re(a-\alpha|x-\alpha) \geq ||a-\alpha||^2$$

et donc α est bien la projection de a sur F.
Réciproquement, si α est la projection de a sur F on a pour $x \in F$
$(1-t)\alpha + tx \in F$, $t \in [0,1]$ d'après la convexité de F.

$$\forall x \in F\ ,\ \forall t \in [0,1]\ ,\ ||a-((1-t)\alpha+tx)||^2 = ||(a-\alpha)-t(x-\alpha)||^2 \geq ||a-\alpha||^2$$

Après developpement et simplification on obtient
$-2t\Re(a-\alpha-x-\alpha) + t^2||x-\alpha||^2 \geq 0$ en divisant par $t \in]0,1]$ et en faisant tendre t vers 0 on obtient $\Re(a-\alpha|x-\alpha) \leq 0$ pour tout $x \in F$.
Remarque.
Si le corps de base était $I\!R$, en posant $\cos\theta = \frac{(x|y)}{||x||\,||y||}$ ceci exprime que l'angle θ est obtu ou droit.

4.4 Projection sur un sous-espace vectoriel fermé

Un sous-espace vectoriel étant convexe, ce qui précède s'applique aux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert E.

Définition 4.5 — *Les vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $(x|y) = 0$.*
- *F étant une partie de E, x est orthogonal à F s'il est orthogonal à tout élément de F.*
  On note $F^\perp$ l'ensemble des éléments orthogonaux à F.Cet ensemble, appelé orthogonal de F est un sous-espace vectoriel fermé de E car $F^\perp = \cap_{a\in F}\{a\}^\perp$ et l'orthogonal d'un élément $a \in E$ est le noyau de la forme linéaire continue $\phi_a : x \to (a|x)$, c'est donc $\phi_a^{-1}(\{0\})$ qui est fermé.
- *Deux parties F et G sont orthoganales si tout vecteur de l'une est orthogonal à tout vecteur de l'autre.*

Remarque.
En appelant G l'espace vectoriel engendré par F on a $F^\perp = G^\perp = \overline{G}^\perp$. La première égalité est vraie car un vecteur orthogonal à d'autres vecteurs est orhogonal à leurs combinaisons linéaires, la deuxième s'obtient par passage à la limite en utilisant la continuité des ϕ_a.

Théoreme 4.7 (de projection sur un sous espace fermé) *La projection d'un point a d'un espace Hilbertien E sur un sous-espace fermé F est l'unique point α de F tel que $a-\alpha$ soit orthogonal à F.*

Démonstration Soit $x \in F$, le vecteur $y = x+\alpha$ est alors élément de F qui est espace vectoriel.
$\Re(a-\alpha|y-\alpha) = \Re(a-\alpha|x) \leq 0$, en remplaçant x par $-x$ on obtient $\Re(a-\alpha|x) = 0$, puis en remplaçant x par ix on obtient $\Im(a-\alpha|x) = 0$ ce qui entraine $(a-\alpha|x) = 0$ pour tout $x \in F$, ce qui exprime que $a-\alpha \perp F$.

Si $\beta \in F$ est tel que $a-\beta \perp F$ on a $(a-\alpha|x) = (a-\beta|x) = 0$ pour tout $x \in F$, en faisant la différence on obtient $(\alpha-\beta|x) = 0$ et si $x = \alpha - \beta$

$$(x|x) = 0 \Rightarrow x = \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$$

il existe donc un seul point α vérifiant $a - \alpha \perp F$.
Dans la suite on notera P_F la projection de E sur F.

Théoreme 4.8 *Si F n'est pas réduit au sous-espace $\{0\}$ P_F est linéaire, continue, de norme 1.* $\ker P_F = F^\perp$ *et $E = F \oplus F^\perp$ (les deux sous-espaces sont supplémentaires).*

Démonstration
Soient $x, y \in E$, $\forall z \in F$ on a $(P_F x - x|z) = (P_F y - y|z) = 0$
d'où $(P_F x + P_F y - (x+y)|z) = 0$ ce qui entraine $P_F(x+y) = P_F(x) + P_F(y)$.
De même si $\lambda \in \mathbb{C}$ $(\lambda P_F(x) - \lambda x|z) = 0 \Rightarrow P_F(\lambda x) = \lambda P_F(x)$. P_F est donc linéaire.
L'égalité $(P_F(x) - x|P_F(x)) = 0$ entraine $||P_F x||^2 = (x|P_F x) \leq ||x||\,||P_F x||$ donc $||P_F x|| \leq ||x||$ et $||P_F|| \leq 1$.
Si $x \in F$ on a $||P_F x|| = ||x||$ d'où $||P_F|| \geq 1$ et donc $||P_F|| = 1$.

$$P_F x = 0 \Leftrightarrow \forall z \in F\ (x|z) = 0 \Leftrightarrow x \in F^\perp$$

ce qui démontre que $\ker P_F = F^\perp$.
Un vecteur $x \in E$ s'écrit $x = (x - P_F x) + P_F x$, le premier vecteur est un élément de $F^\perp$ et le second un élément de F, on a de plus $F \cap F^\perp = \{0\}$ ces deux résultats établissent que $E = F \oplus F^\perp$.

lemme 4.8.1 *Soit v un vecteur d'un espace de Hilbert E. $f_v : x \to (x|v)$ est une forme linéaire continue sur E de norme $||v||$. L'application $v \to f_v$ est une isométrie semi linéaire de E vers E^*.*

Démonstration
En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a
$|(x|v)| \leq ||x||\,||v|| \Rightarrow ||f_v|| \leq ||v||$. De plus $f_v(v) = ||v||^2$, on déduit donc
$||f_v|| \geq ||v||$ d'où $||f_v|| = ||v||$.
$v \to f_v$ est bien une isométrie semi-linéaire de E dans E^*, le théorème suivant montre qu'elle est surjective.

Théoreme 4.9 *Si f est une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert E, il existe un vecteur unique v tel que $\forall x \in E$, $f(x) = (x|v)$.*

Démonstration Si $f = 0$ $v = 0$ convient. Sinon $F = f^{-1}(\{0\})$ est un hyperplan fermé, f étant continue. Le théorème de projection entraine l'existence d'un vecteur $u \perp F$. Posons $g(x) = (x|u)$, cette forme linéaire a le même noyau que f, on a donc $g = \lambda f$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$, soit $\forall x \in E$ $f(x) = \lambda(x|u)$, on prend alors $v = \overline{\lambda} u$
Application.
Pour toute forme linéaire continue ϕ sur $E = L^2_\mu(X)$ on a :

$$\exists g \in E \ , \ \forall f \in E \ , \ \phi(f) = \int_X f\overline{g}d\mu \text{ et } ||\phi|| = ||g||_2.$$

On peut donc identifier E et son dual topologique.

4.5 Espaces de Hilbert et systèmes orthogonaux

Définition 4.6 — *Un espace de Hilbert E est séparable s'il existe un sous-ensemble dénombrable $A = \{x_1, x_2, \cdots\}$ dense dans E, c'est à dire tel que $\overline{A} = E$. Il est équivalent de dire que toute boule ouverte non vide de E contient au moins un élément de A.*

— *Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est orthonormée si $(e_i|e_j) = 0$ pour $i \neq j$ et $||e_i|| = 1$pour tout $i \in E$.*

Théoreme 4.10 — *Toute famille orthonormée est libre, ce qui signifie que toute combinaison linéaire composée d'un nombre fini de vecteurs donne le vecteur nul seulement si tous les coefficients scalaires sont nuls.*

— *Dans un espace de Hilbert séparable toute famille orthonormée est finie ou dénombrable.*

Démonstration
Soit J une partie finie quelconque de I et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée.

$$\sum_{i\in J} \alpha_i e_i = 0 \Rightarrow \forall j \in J \ (e_j | \sum_{i\in J} \alpha_i e_i) = 0 = \sum_{i\in J} \overline{\alpha_i}(e_j|e_i) = \overline{\alpha_j}$$

ce qui démontre qu'une famille orthonormée est une famille libre.
Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée dans un espace de Hilbert séparable E.Si $e_j \neq e_i$ $||e_j - e_i||^2 = ||e_j||^2 + ||e_i||^2 - 2\Re(e_j|e_i) = 2$ donc $||e_j - e_i|| = \sqrt{2}$.
Soit $A = \{x_1, x_2, \cdots\}$ un ensemble dénombrable dense dans E. Pour chaque $i \in I$ il existe un entier $n(i)$ tel que $||x_{n(i)} - e_i|| < 1/4$ car A est dense dans E.Montrons que l'application $i \to n(i)$ est injective. Soit $n(i) = n(j)$

$$||e_i - e_j|| \leq ||e_i - x_{n(i)}|| + ||x_{n(i)} - e_j|| < 1/2 \Rightarrow e_i = e_j.$$

Cette application de I dans $\mathbb{N}$ étant injective, l'ensemble I est fini ou dénombrable.
Dans la suite l'espace E sera toujours supposé séparable

Théoreme 4.11 *Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ un système orthonormé fini de E et F le sous espace à n dimensions engendré par ces vecteurs. Pour tout x de E on a*

1) $P_F x = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i$.

2) $d^2(x, F) = ||x||^2 - \sum_{i=1}^n |(x|e_i)|^2$ où $d(x, F) = \inf_{y\in F} d(x, y)$ $= \inf_{y\in F} ||x - y||$.

Démonstration
1) On a $\forall j$, $1 \leq j \leq n$ $(x - \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i|e_j) = 0$, donc $x - \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i \perp F$.
2) $d^2(x, F) = ||x - \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i||^2 = ||x||^2 - \sum_{i=1}^n |(x|e_i)|^2 - \sum_{i=1}^n |(x|e_i)|^2 + \sum_{i=1}^n |(x|e_i)|^2$. Ceci démontre que

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \ , \ ||x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i|| \geq ||x - \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i||$$

.

Corollaire 4.11.1 *Inégalité de Bessel Soit $(e_i)_{i\in I}$, L'ensemble I étant fini ou dénombrable, un système orthonormé quelconque et $x \in E$, on a*

$$\sum_{i\in I} |(x|e_i)|^2 \leq ||x||^2.$$

La procédure qui suit, qui permet de construire des systèmes orthonormés en dimension finie s'étend aux espaces de Hilbert.

Théoreme 4.12 (Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt) *Soit E un espace de Hilbert et $(x_n, n \geq 1)$ des vecteurs linéairementindépendants de E. On définit*

$$\begin{array}{lcll} w_1 & = & x_1 & , v_1 = w_1/||w_1|| \\ w_2 & = & x_2 - (v_1|x_2)v_1 & , v_2 = w_2/||w_2|| \\ & \vdots & & \\ w_n & = & x_n - \sum_{k=1}^{n-1}(v_k|x_n)v_k & , v_n = w_n/||w_n|| \\ & \vdots & & \end{array}$$

La suite $(v_n, n \geq 1)$ est un système orthonormé et pour tout $n \geq 1$, $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ engendrent le même sous espace vectoriel de E.

La démonstration de ce théorème est aisée et laissée en exercice. Application.
Déterminer

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} (x^3 - a - bx - cx^2)^2 dx.$$

Considérons $E = L^2([-1, 1], I\!R)$ et$F$ le sous espace vectoriel de dimension 3 engendré pa f_0, f_1, f_2 où $f_i : x \to x^i$. F est complet car c'est un sous espace de dimension finie. Le problème revient à calculer la distance d de $f : x \to x^3$ à ce sous espace (l'intégrale est égale à d^2). Déterminons tout d'abord $P_F f$, l'intégrale cherchée sera $||f - P_F f||^2$.
Construisons une base orthonormée de F par la méthode de Gram-Schmidt.
$v_0(x) = \frac{f_0(x)}{||f_0||} = \sqrt{2}/2$
$w_1(x) = x - (v_0|f_1)v_0 = x$, $v_1(x) = (\sqrt{6}/2)x$
$w_2(x) = x^2 - (v_0|f_2)v_0 - (v_1|f_2)v_1 = x^2 - 1/3$, $v_2 = (2\sqrt{2}/3)(x^2 - 1/3)$.

$$P_F f = (f|v_0)v_0 + (f|v_1)v_1 + (f|v_2)v_2 = (3/5)x \; ||f - P_F f||^2 = \int_{-1}^{1} (x^3 - 3/5x)^2 dx = 8/175$$

Définition 4.7 — *Un système orthonormé $A = (e_i, i \geq 1)$ est complet si*

$$\forall x \in E \; , \; \forall \epsilon > 0 \; , \; \exists n_0 \in I\!N \; ||x - \sum_{i=1}^{n_0} (x|e_i)e_i|| \leq \epsilon.$$

- *Un système orthonormé est fermé si pour tout $x \neq 0$ de E on peut trouver $n \in I\!N^*$ tel que $(e_n|x) \neq 0$.*
- *Un système orthonormé est maximal s'il n'est pas sous ensemble propre d'un autre système orthonormé.*

Théoreme 4.13 *Soit $A = (e_i, i \in I)$, $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ ou $I = I\!N^*$, un système orthonormé dans un espace de Hilbert E. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1) A est complet.
2) A est maximal dans E.
3) A est fermé.
4) Si $x \in E$, $(x|x) = ||x||^2 = \sum_{i\in I} |(x|e_i)|^2$. (Identité de Parseval).
5) Si $x, y \in E$, $(x|y) = \sum_{i\in I} (x|e_i)\overline{(y|e_i)}$.

Démonstration
$1 \Rightarrow 2$
Si A n'est pas maximal dans E $\exists e_0 \in E$ tel que $(e_i, i \in I\!N)$ est un système orthonormé. Soit $c_i = (e_0|e_i)$

$$\forall n \in I\!N\,,\ ||e_0 - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i|| = ||e_0|| = 1$$

A n'est donc pas complet.
$2 \Rightarrow 3$
Si A n'est pas fermé, il existe $x \neq 0$, $x \in E$ tel que quel que soit $i \in I$, $(x|e_i) = 0$. En posant $e_o = x/||x||$ le système $(e_i, i \in I\!N)$ est orthonormé et A n'est donc pas maximal.
$3 \Rightarrow 4$
L'inégalité de Bessel entraine $\sum_{i\in I} |(x|e_i)|^2 \leq ||x||^2$, montrons l'inégalité inverse dans le cas le plus général $I = I\!N^*$. Posons $s_n = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i$

$$||s_n - s_m||^2 = \left(\sum_{i=m+1}^{n} (x|e_i)e_i | \sum_{i=m+1}^{n} (x|ei)e_i \right) = \sum_{i=m+1}^{n} |(x|e_i)|^2 \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} |(x|e_i)|^2 \ (n > m).$$

Le dernier terme est le reste d'une série convergente (inégalité de Bessel) et tend donc vers zéro quand n et m tendent vers zéro, (s_n) est donc une suite de Cauchy de E, convergeant vers un élément $y \in E$ car E est complet.

$$\forall n \in I\!N^* (e_n|x) = (e_n|y) \Rightarrow \forall n\ (e_n|x - y) = 0 \Rightarrow x = y$$

car le système est fermé.
$4 \Rightarrow 5$
$(x|y)$ et $\sum_{i\in I} (x|e_i)\overline{(y|e_i)}$ sont deux formes hermitiennes prenant les mêmes valeurs sur la diagonale, donc indentiques.
$5 \Rightarrow 4$ est immédiat.
$4 \Rightarrow 1$
Soit n_0 tel que

$$n > n_o \Rightarrow ||x||^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x|e_i)|^2 < \epsilon\ ,\ \text{alors}\ ||x - \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i||^2 = ||x||^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x|e_i)|^2 < \epsilon.$$

Théoreme 4.14 *Un espace de Hilbert est séparable si et seulement il contient un système orthonormé complet fini ou dénombrable.*

Démonstration
Supposons E séparable et soit (x_n) un sous ensemble dénombrable qui est dense.

On peut en extraire une sous suite (x_{n_k}) de vecteurs linéairement indépendants telle que tout x_n soit une combinaison linéaire finie des x_{n_k}. Le procédé de Gram-Schmidt appliqué à cette suite permet de construire un système orthonormé (y_n) tel que tout x_n soit combinaison linéaire finie des y_n. Un vecteur $x \in E$ orthogonal à tous les y_n est donc orthogona à tous les x_n donc à $E = \overline{(x_n)}$ ce qui entraine que le système (y_n) est fermé.
Nous admettrons la réciproque de ce théorème.

Théoreme 4.15 *Un espace de Hilbert séparable est isométrique à l'espace $l^2 = l^2(\mathbb{N})$ s'il est de dimension infinie, à un espace $\mathbb{C}^n$ s'il est de dimension finie.*

Démonstration
Si $\dim E = n$ l'application $x = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i \rightarrow ((x|e_1), (x|e_2), \cdots (x|e_n))$, où $(e_i, 1 \leq i \leq n)$ est une base orthonormée de E, est une isométrie car $||x||^2 = \sum_{i=1}^n |(x|e_i)|^2$.
Si E est de dimension infinie choisissons $A = (e_i, i \in \mathbb{N}^*)$ un système orthonormé complet et posons $x_i = (x|e_i)$. On a démontré que $||x||^2 = \sum_{i=1}^{infty} |x_i|^2$, l'application

$$\phi : E \rightarrow l^2 \;\; x \rightarrow (x_i, i \in \mathbb{N}^*)$$

est donc une isométrie, montrons qu'elle est surjective. On peut remarquer que la famille $B = (f_i, i \in \mathbb{N}^*)$, définie par $f_i(j) = \delta_i^j$, est un système orthonormé complet de l^2 car $(f_i|f_j) = \delta i^j$ et $||(a_i)||_{l^2} = \sum_{i=1}^{\infty} -(a|f_i)|^2$.
$B \subset \phi(E)$, $\phi(E)$ contenant les combinaisons linéaires finies d'éléments de B est donc dense dans l^2, or $\phi(E)$ est complet comme image isométrique d'un espace de Hilbert, il est donc fermé dans l^2, on a donc $\phi(E) = l^2$. Nous allons maintenant étudier un cas particulier important comprenant la convergence en moyenne quadratique (dans L^2) des séries de Fourier.

4.6 Bases orthonormales de $L^2([a, b])$

Théoreme 4.16 (Critère de Dalzell) *Une famille orthonormée $(f_n, n \geq 1)$ de $L^2_m([a, b])$, m étant la mesure de Lebesgue de $[a, b]$, est un système orthonormé complet si et seulement si*

$$\frac{2}{(a-b)^2} \sum_{n\geq 1} \int_a^b |\int_a^u f_n(t)dt|^2 du = 1$$

Démonstration
Rappellons que si A est un sous ensemble de E la fonction indicatrice χ_A notée aussi $\mathbf{1_A}$ est définie par $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$ et $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$.
Supposons le système $(f_n, n \geq 1)$ orthonormé complet. $\forall u \in [a, b]$, $\chi_{[a,u]} \in L^2_m$ on peut donc écrire

$$\chi_{[a,u]} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \; , \; c_n = (\chi_{[a,u]}|f_n) = \int_a^u \overline{f_n(t)} dt$$

L'égalité de Parseval entraine

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\int_a^u f_n(t)dt|^2 = u - a \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |\int_a^u f_n(t)dt|^2 du = \frac{(b-a)^2}{2}.$$

Nous admettrons la réciproque de ce théorème.

4.6.1 Application

Corollaire 4.16.1 *La famille de fonctions*

$$e_n : x \to \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \ , \ n \in \mathbb{Z}$$

est un système orthonormé complet de l'espace de Hilbert $E = L^2_m([0, 2\pi])$.

Démonstration
Montrons que cette famille de fonctions vérifient le critère de Dalzell.

$$\frac{2}{4\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} |\int_0^u e^{int} dt|^2 du = \frac{2}{8\pi^3}(\frac{8\pi^3}{3} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{4\pi}{n^2})$$

$$= 2/3 + \frac{2}{8\pi^3}(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{n^2}) = 2/3 + \frac{2}{8\pi^3} . \frac{8\pi^3}{6} = 1.$$

Une fonction f étant élément de E on a

$$(f|e_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \text{ et } f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (f|e_n) e_n \text{ dans } E$$

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \right) f_n \text{ où } f_n(x) = e^{inx}.$$

On note $c_n(f) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$, ce qui entraine $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) f_n$ dans E, ce qui signifie

$$\lim_{N\to\infty} ||f - \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) f_n||_2 = 0.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ est appelée série de Fourier de f. En écrivant $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ la série précédente peut également s'exprimer sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. On a les relations $a_0 = c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = ic_n - ic_{-n}$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \ , \ a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \ (n > 0) \ , \ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \ (n > 0).$$

Remarque.

— On peut supposer $f(0) = f(2\pi)$ car les coefficients de la série de Fourier sont inchangés en modifiant un nombre fini de valeurs prises par f, ceci permet de considérer f comme la restriction à $[0, 2\pi]$ d'une fonction 2π-périodique.
— Le calcul des coefficients peut dans ces conditions être effectué sur $[a, a + 2\pi]$ avec a quelconque.

— Si f est une fonction paire, $\forall n > 0$ $b_n = 0$ et si elle est impaire $\forall n \in I\!N$ $a_n = 0$.

Les résultats du théorème 4.13 se traduisent de la façon suivante pour les séries de Fourier.

4) Identité de Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = |c_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(|c_k|^2 + |c_{-k}|^2)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

pour une fonction $f \in L^2_m([0, 2\pi])$

5) $\forall f, g \in L^2_m([0, 2\pi])$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(g)}$.

L'isométrie entre $L^2_m([0, 2\pi])$ et l^2 se traduit par

pour toute suite $(c_n, n \in \mathbb{Z})$ vérifiant $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$ il existe $f \in L^2_m([0, 2\pi])$ telle que la série de Fourier de f soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.

4.6.2 Convergence ponctuelle d'une série de Fourier

Les coefficients a_n , b_n , c_n sont également définis si $f \in L^1_m([0, 2\pi])$ car $|f(t)e^{int}| = |f(t)|$. Dans le cas où f est de plus 2π-périodique le problème de la convergence ponctuelle (convergence simple ou uniforme) de $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ se pose. Le théorème de Dirichlet, que nous allons démontrer donne des conditions pour la convergence ponctuelle de cette série. Commençons par transformer $S_N(f)$.

L'expression $D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ est appelé noyau de Dirichlet.

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)})dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_N(x-t)dt$$

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)D_N(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)D_N(t)dt \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) + f(x-t))D_N(t)dt. \end{aligned}$$

La deuxième égalité provient de la parité de la fonction D_N.

Théoreme 4.17 (Lemme de Riemann-Lebesgue.) *On considère une fonction $f \in L^1_m([0, 2\pi])$, les coefficients $c_n = (1/(2\pi))\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$ de la série de Fourier de f tendent vers zéro quand $|n|$ tend vers zéro.*

Si $f \in L^2_m([0, 2\pi])$ c'est immédiat car le terme général d'une série convergente (identité de Parseval) tend vers zéro quand $n \to \infty$ sinon $L^2_m([0, 2\pi])$ est dense dans $L^1_m([0, 2\pi])$ et si $f \in L^1$ il existe $g \in L^2$ telle que $||f - g||_1 < \epsilon$.

$$|c_n(f)| \leq |c_n(f) - c_n(g)| + |c_n(g)| \leq ||f - g||_1 + |c_n(g)|$$

et $c_n(f)$ tend bien vers zéro quand $|n|$ tend vers l'infini.

Remarque.

Ce résultat peut être démontré pour un intervalle $[a, b]$ quelconque.

Théoreme 4.18 (Critère de Dini) *Si $f \in L^1_m([-\pi,\pi])$, $A \in I\!R$, f 2π-périodique et si*

$$\int_0^\pi \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2A|}{t}dt < +\infty$$

la série de Fourier de f converge en x et $\lim_{n\to\infty} S_N(f)(x) = A$

On peut remarquer que

$$D_N(t) = e^{-2iNx}(1+e^{ix}+\cdots+e^{2iNx}) = e^{-2iNx}\frac{1-e^{i(2N+1)x}}{1-e^ix} = \frac{\sin(2N+1)t/2}{\sin(t/2)}$$

$(x \neq o \bmod 2\pi)$
de plus $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 2\pi$ et $\int_0^\pi D_N(t)dt = \pi$ cette dernière valeur étant obtenue par parité de D_N.

$$S_N(f)(x) - A = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)-2A}{t}\frac{t}{\sin(t/2)}\sin((N+1/2)t)dt$$

ceci tend vers zéro d'après le lemme de Riemann-Lebesgue car les deux premiers termes de l'intégrale sont intégrables (le premier d'après l'hypothèse) et le troisième est la partie imaginaire de $e^{i(N+1/2)t}$.

Théoreme 4.19 (Théorème de Dirichlet) *Soit f une fonction 2π-périodique et intégrable sur $[0,2\pi]$ admettant une limite à gauche et à droite en $x \in [0,2\pi]$ et dérivable à gauche et à droite en ce point. La série de Fourier de f converge en x vers la demi-somme des limites des limites à gauche et à droite.*

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

Ceci est une conséquence immédiate du critère de Dini avec
$A = (f(x+)+f(x-))/2$ de plus

$$t \to \frac{|f(x+t)+f(x-t)-f(x+)-f(x-)|}{t}$$

est intégrablesur $[0,\pi]$, f étant dérivable à gauche et à droite de x.
Remarque.
Si les conditions du théorème sont vérifiées et si f est continue en x la série de Fourier de f converge alors vers $f(x)$ en x.

4.7 Opérateur linéaire sur un espace de Hilbert

Un opérateur linéaire sur E est une application linéaire de E dans E, sauf mention contraire ils seront continus.

Théoreme 4.20 *Une forme sesquilinéaire est continue sur $E \times E$ si et seulement si*

$$\exists M \in I\!R^+ ,\ \forall (x,y) \in E\times E ,\ |f(x,y)| \leq M||x||\,||y||.$$

Démonstration
Supposons f continue, la continuité en 0 se traduit par

$$\exists a, b \in I\!R_+^* \ , \ ||x|| < a \ , \ ||y|| < b \Rightarrow |f(x,y)| \leq 1$$

Par homogénéité on a

$$\forall x, y \in E \ , \ |f(x,y)| \leq \frac{1}{ab} ||x|| \, ||y||.$$

Réciproquement, si la condition est vérifiée on a $x, y, \xi, \eta \in E$

$$|f(x+\xi, y+\eta) - f(x,y)| \leq M \left(||\xi|| \, ||y+\eta|| + ||\eta|| \, ||x|| \right).$$

Ceci montre la continuité de f.

Théoreme 4.21 — *Si u est un opérateur linéaire sur E, $\phi_u : (x,y) \to (ux|y)$ définit une forme sesquilinéaire continue sur $E \times E$ telle que $||\phi_u|| = ||u||$.*
— *Réciproquement si ϕ est une forme sesquilinéaire continue sur $E \times E$ il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\phi = \phi_u$.*
Remarque. On définit

$$||\phi|| = \sup_{x \neq 0, y \neq 0} \frac{\phi(x,y)}{||x|| \, ||y||}$$

et donc

$$|\phi(x,y)| \leq ||\phi|| \, ||x|| \, ||y||$$

et le M du théorème est tel que $M \geq ||\phi||$.

Démonstration
La sesquilinéarité de ϕ_u est immédiate. L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraine

$$|(ux|y)| \leq ||ux|| \, ||y|| \leq ||u|| \, ||x|| \, ||y|| \Rightarrow ||\phi_u|| \leq ||u||.$$

En prenant $y = ux$ on obtient

$$||ux||^2 = \phi_u(x, ux) \leq ||\phi_u|| \, ||x|| \, ||ux|| \Rightarrow ||ux|| \leq ||\phi_u|| \, ||x|| \Rightarrow ||u|| \leq ||\phi_u||$$

ces deux inégalités permettant d'écrire $||\phi_u|| = ||u||$.
Réciproquement soit ϕ une forme sesquilinéaire continue sur $E \times E$. L'application $g : y \to \phi(x,y)$ est linéaire continue (car $|g(y)| \leq (||\phi|| \, ||x||) ||y||$). D'après le théorème 4.9 il existe $v \in E$ tel que $g(y) = (y|v)$ pour tout $y \in E$, ou encore $(v|y) = \phi(x,y)$. Posons $v = ux$, on vérifie que $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$ si $x, y \in E \ , \ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, u est donc linéaire.

$$||ux||^2 = \phi(x, ux) \leq ||\phi|| \, ||x|| \, ||ux|| \Rightarrow ||ux|| \leq ||\phi|| \, ||x||$$

l'application linéaire u est donc continue.

Théoreme 4.22 *A tout opérateur $u \in \mathcal{L}(E)$ (opérateur linéaire continu sur E) il existe un élément unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que*

$$\forall x, y \in E \ , \ (ux|y) = (x|u^*y).$$

u^* est appelé opérateur adjoint de u.

Démonstration
Posons $\psi(y,x) = (y|ux)$. C'est une forme sesquilinéaire continue de norme $||u||$, d'après le théorème précédent il existe $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\psi = \phi_{u^*} : (y,x) \to (u^*y|x)$, d'où

$$\forall (x,y) \in E \times E \ , \ (x|u^*y) = (ux|y) \text{ et } ||\phi_{u^*}|| = ||u^*|| = ||\psi|| = ||u||$$

d'où $||u^*|| = ||u||$.
Propriétés.

1) $u^{**} = u$.
2) $(uv)^* = v^*u^*$.
3) $||u^*|| = ||u||$.
4) $||uu^*|| = ||u^*u|| = ||u||^2 = ||u^*||^2$.
5) $(\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*$.
6) $(u+v)^* = u^* + v^*$.
7) Si u est inversible, u^*est inversible et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

1,2,3,5,6 sont immédiats, 4 sera montré plus loin. Montrons 7. Posons $v = u^{-1}$.

$$uv = vu = I \Rightarrow v^*u^* = u^*v^* = I \Rightarrow u^* \text{ est inversible et } (u^*)^{-1} = (u^{-1})^*.$$

.

Définition 4.8 — *$u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si $u^*u = uu^*$.*
— *u est unitaire si $u^*u = uu^* = I$.*
— *u est autoadjoint ou hermitien si $u = u^*$.*

Exemple.
$E = L^2_\mu(X)$, $u : E \to E$ $f \to hf$ où h est mesurable bornée.

$$\int_X (hf)\overline{g} d\mu = \int_X f\overline{\overline{h}g} d\mu \Rightarrow u^*(g) = \overline{h}g$$

donc $uu^* = u^*u$,u est donc un opérateur normal. Si h est rélle u est autoadjoint.
Remarque.
Si u est autoadjoint $\phi_u : (x,y) \to (ux|y)$ est sesquilinéaire hermitienne (la réciproque est vraie), c'est pourquoi on dit aussi que u est hermitien.

Théoreme 4.23 —

$$\frac{1}{2}||u|| \le \sup_{||x|| \le 1} |(ux|x)| \le ||u||.$$

— *si u est hermitien $||u|| = \sup_{||x|| \le 1} |(ux|x)|$.*

Démonstration

$$||u|| = ||\phi_u|| \Rightarrow ||u|| = \sup_{||x||\leq 1} ||ux|| = \sup_{||x||\leq 1,\ ||y||\leq 1} |(ux|y)| \geq \sup_{||x||\leq 1} |(ux|x)|.$$

Posons $\alpha = \sup_{||x||\leq 1} |(ux|x)|$, on a $\forall x \in E$, $|(ux|x)| \leq \alpha ||x||^2$ $||u|| = \sup_{||x||\leq 1, ||y||\leq 1} |(ux|y)|$, en utilisant 4.1 pour la forme sesquilinéaire ϕ_u on obtient

$$||u|| \leq \frac{1}{4}\left(\alpha||x+y||^2 + \alpha||x-y||^2 + \alpha||x+iy||^2 + \alpha||x-iy||^2\right)$$
$$= \frac{\alpha}{4}\left(2(||x||^2 + ||y||^2) + 2(||x||^2 + ||y||^2)\right) \leq 2\alpha.$$

on a donc $(1/2)||u|| \leq \sup_{||x||\leq 1} |(ux|x)|$.
Supposons u hermitienne. Pour $z \in \mathbb{C}$

$$|z| = \sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} |\Re(e^{i\theta} z)| \Rightarrow ||u|| = \sup_{||x||\leq 1, ||y||\leq 1} |(ux|y)| = \sup_{||x||\leq 1, ||y||\leq 1, 0\leq\theta\leq 2\pi} \left|\Re(e^{i\theta}(ux|y))\right|$$
$$= \sup_{||x'||\leq 1, ||y||\leq 1} |\Re(u(x')|y)| \leq \frac{1}{4} \sup_{||x'||\leq 1, ||y||\leq 1} \left(\alpha||x'+y||^2 + \alpha||x'-y||^2\right)$$
$$\leq \frac{\alpha}{4} \sup_{||x'||\leq 1, ||y||\leq 1} (2(||x'||^2 + ||y||^2)) = \alpha$$

on a donc $||u|| \leq \alpha$ et finalement $||u|| = \sup_{||x||\leq 1} |(ux|x)|$.

Corollaire 4.23.1 *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ u^*u est autoadjoint et $||u^*u|| = ||u||^2$.*

Démonstration
$(u^*u)^* = u^*u$, il est donc bien autoadjoint.

$$||u^*u|| = \sup_{||x||\leq 1} |(u^*ux|x)| = \sup_{||x||\leq 1} (ux|ux) = \sup_{||x||\leq 1} ||ux||^2 = ||u||^2.$$

La propriété 4 est donc démontrée.

4.8 Eléments propres d'un opérateur hermitien

Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda I) = \{x \in E | ux = \lambda x\}$ est le sous espace propre pour la valeur propre λ si $E_\lambda(u)$ n'est pas réduit au vecteur nul. Dans ce cas un élément $x \in E_\lambda(u)$ est appelé vecteur propre associé à u (si $ux = \lambda x$ alors $|\lambda| \leq ||u||$). En dimension finie l'ensemble Λ des valeurs propres de u est constitué des racines de $\text{dét}(u - \lambda I)$, il est non vide (le corps est $\mathbb{C}$) mais E n'est somme des $E_\lambda(u)$ que si u est diagonalisable.
En dimension infinie plus rien de cela ne subsiste, Λ peut être infini

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \rightarrow (\lambda_i x_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ de } l^2 \text{ dans lui même } \sup_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i| < +\infty$$

admet tous les λ_i comme valeurs propres, mais Λ peut être vide

$$E = L^2_m([0,1])\ ,\ u : f \rightarrow hf \ h \text{ mesurable bornée } (u - \lambda I)f = 0 \Leftrightarrow hf = \lambda f$$

ceci signifie $f = 0$ p.p. dans $K = \{x \in [0,1] | h(x) \neq \lambda\}$, si $\overline{K}$ est négligeable $f = 0$ p.p. or si $h(x) = x$ $\{x \in [0,1] | h(x) = \lambda\}$ est $\emptyset$ si $\lambda \notin [0,1]$ et $\{\lambda\}$ si $\lambda \in [0,1]$, u n'a donc pas de valeur propre.

Théoreme 4.24 *Les valeurs propres d'un opérateur hermitien sont réelles et les sous espaces propres son deux à deux othogonaux.*

Démonstration
Si $ux = \lambda x$ $(ux|x) = \lambda ||x||^2 = (x|ux) \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.
Soient x et y deux vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres distinctes λ et μ.

$$\lambda(x|y) = (\lambda x|y) = (ux|y) = (x|uy) = \mu(x|y) \text{ d'où } (x|y) = 0$$

. On va terminer en montrant que sous certaines un opérateur hermitien est diagonalisable.

Définition 4.9 *L'opérateur u sur E est dit compact si $\overline{u(B)}$ est compacte, où B est la boule unité fermée de E. Il revient au même de dire que pour toute suite (x_n) bornée, on peut extraire une sous suite (x_{n_k})telle que $(u(x_{n_k}))$ converge.*

Théoreme 4.25 *Soit u un opérateur hermitien compact sur E. Pour $\lambda \neq 0$ $E_\lambda(u)$ est de dimension finie. L'ensemble Λ des valeurs propres de u est finie ou peut être rangé en une suite tendant vers zéro. De plus E est l'adhérence du sous espace engendré par tous les $E_\lambda(u)$, $\lambda \in \Lambda$.*

Démonstration
Si Λ est infini, soit $\delta > 0$. Supposons qu'il existe une infinité de valeurs propres telles que $|\lambda| \geq \delta$ $(\delta \leq \lambda \leq ||u||)$, il existe donc une suite de ces valeurs propres convergeant vers convergeant vers $\lambda \neq 0$ car la couronne $\{z \in \mathbb{C} | \delta \leq |z| \leq ||u||$ est compacte dans $\mathbb{C}$.. Soit x_n un vecteur propre associé à la valeur propre λ_n, les x_n son linéairement indépendants, on appelle E_n le sous espace engendré par $x_0, x_1, \cdots, x_n$. On a $u(E_n) \subset E_n$ et $(u - \lambda_n I)E_n \subset En - 1$ $n \geq 1$, E_{n-1} étant sous espace strict de E_n il existe $y_n \in E_n$, $y_n \perp E_{n-1}$, $||y_n|| = 1$.

$$||\frac{y_n}{\lambda_n}|| = \frac{1}{|\lambda_n|} \leq \frac{1}{\delta},$$

u étant compact on peut extraire une sous suite pour laquelle la suite $(u(y_n/\lambda_n))$ converge. Ceci est contradictoire car

$$n < m \ , \ u(\frac{y_n}{\lambda_n}) - u(\frac{y_m}{\lambda_m}) = y_n + \underbrace{\frac{1}{\lambda_n}(u - \lambda_n I)y_n - u(\frac{y_m}{\lambda_m})}_{\in E_{n-1}}$$

cet élément est donc de norme ≥ 1 et ceci démontre que pour $\delta > 0$ il y a un nombre fini de valeurs propres de module $\geq \lambda$.
L'ensemble des valeurs s'il est infini est donc dénombrable car réunion dénombrable d'ensembles finis et de plus d'après ce qui précède $\Lambda = (\lambda_n)$ peut être rangé

en une suite tendant vers zéro. Si $E_\lambda(u)$ était de dimension infinie, on pourrait choisir un système orthonormé dénombrable $(e_n)_{n\in I\!N}$ dans $E_\lambda(u)$, mais $u(e_n) = \lambda e_n$ et $||e_n - e_m|| = \sqrt{2}$, ceci contredit la compacité de u, $E_\lambda(u)$ est donc de dimension finie. Montrons qu'il existe une valeur propre λ telle que $|\lambda| = ||u||$.
D'après le théorème 4.23 il existe une suite (x_n) d'éléments de E telle que

$$\lim_{n\to\infty} |(ux_n|x_n)| = ||u||$$

il existe une sous suite de (x_n) telle que $(ux_n|x_n)$ converge vers $\alpha = ||u||$ ou $-||u||$ car $(ux_n|x_n) \in I\!R$, u étant hermitien.

$$0 \le ||ux_n - \alpha x_n|| - ||ux_n||^2 - 2\alpha(ux_n|x_n) + \alpha^2||x_n||^2 \to_{n\to\infty} 0$$

u étant compact il existe une sous suite de (x_n) convergeant vers un élément $y \in E$ et ceci entraine pour cette même sous suite $\lim_{n\to\infty} \alpha x_n = y$, si $u \neq 0$ $\alpha \neq 0$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = y/\alpha = x$ et $ux = \alpha x$, α est donc valeur propre pour u.
Soit $F = \overline{\cup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda}$ et $H = F^\perp$. H est u-invariant $(u(E) \subset E)$ et u_H est un opérateur hermitien compact sans valeur propre, d'après ce qui précède ceci n'est possible que si $H = \{0\}$, on a donc $E = F \oplus H = F$.
Après avoir choisi un système orthonormé dans chaque $E_\lambda(u)$ on obtient par leur réunion un système orthonormé complet dans E constitué de vecteurs de u et quel que soit $\delta > 0$ il y a un nombre fini de λ_n, valeurs propres de u, de module supérieur ou égal à δ.

4.9 Exercices

Exercice 1

Soit $(F_n)_{n\in I\!N}$ une suite croissante de convexes fermés d'un espace de Hilbert E,

$$F = \overline{\cup_{n\in I\!N} F_n}$$

a étant un point de E on appelle $\alpha_n$et α les projections orthogonales de a sur F_n et F respectivement.
1) Montrer que la suite $(d_n)_{n\in I\!N}$ définie par $d_n = ||a - \alpha_n||$ est une suite convergente dans $I\!R$.
2) En utilisant l'identite de la mediane, montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in I\!N}$ est une suite de cauchy de E.
3) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in I\!N}$ converge vers α.

Exercice 2

1) Soit V un sous espace fermé de l'espace de Hilbert E. Montrer que $P_V^2 = P_V$ et que $P_V^* = P_V$.
2) Montrer réciproquement que si $T \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $T^2 = T$ et $T^* = T$, T est l'opérateur de projection sur V, sous espace vectoriel fermé engendré par $T(E)$.

Exercice 3

Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ n points d'un espace de Hilbert E. Le déterminant de Gram de ces n points est défini par

$$G(x_1, x_2, \cdots, x_n) = |(x_i|x_j)|_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$$

1) Montrer que $G(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq 0$ et que $G(x_1, x_2, \cdots, x_n) > 0$ équivaut à dire que les x_i sont linéairement indépendants. (Utiliser une base orthonormée dans le sous espace vectoriel engendré par les x_i).
2) Montrer que si les x_i sont linéairement indépendants et si L est le sous espace engendré par ces vecteurs, on a

$$d^2(x, F) = \frac{G(x, x_1, x_2, \cdots, x_n)}{G(x_1, x_2, \cdots, x_n)}.$$

Exercice 4

Calculer

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} (x^3 - a - bx - cx^2)^2 dx.$$

Exercice 5

1) Soit E un espace de Hilbert et M un sous espace vectoriel fermé de E. $x_0 \in E$, montrer que

$$\min\left(||x_0 - x|| \;|x \in M\right) = \max\Big(|(x_0|y)| \;|y \in M^{\perp}, ||y|| = 1\Big).$$

2) Calculer

$$\max_{g} \int_{-1}^{1} x^3 g(x)dx \text{ où } g : I\!R \to I\!R$$

vérifie

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} xg(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx, \; \int_{-1}^{1} (g(x))^2 dx = 1.$$

Exercice 6

Calculer

$$\min_{a,b,c} \int_{0}^{+\infty} (x^3 - a - bx - cx^2) e^{-x} dx.$$

Exercice 7

On appelle E l'espace de Hilbert constitué par les fonctions mesurables à valeurs dans $I\!R$ vérifiant :

$$||f||^2 = (f|f) = \int_0^{+\infty} (f(t))^2 e^{-t} dt < +\infty.$$

Le produit scalaire associé est défini par

$$(f|g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt.$$

Le résultat suivant pourra être utilisé sans démonstration

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n! \ , \ n \in \mathbb{N}^*.$$

1) On considère la suite

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^n)$$

a) Vérifier, en utilisant la formule de Leibnitz que $L_n(x)$ est un polynome de degré n.
b) Montrer que si f_n est la fonction $x \to x^n$ on a

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n-1\} \ \ (f_k|L_n) = 0 \ \text{ et } \ (f_n|L_n) = (-1)^n n!$$

<u>NB :</u> Il pourra être utile de remarquer que $x \to \frac{d^i}{dx^i}(e^{-x} x^n)$ s'annule en 0 si $i < n$ (justifiez le).
c) Déterminer le coefficient de x^n dans $L_n(x)$ et en déduire que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthonormal de E.
2) a) Montrer que $\forall \lambda \geq 0$ la fonction $u_\lambda : x \to e^{-\lambda x}$ appartient à E.
b) Montrer que

$$(u_\lambda|L_n) = \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+1)x} x^n dx = \frac{\lambda^n}{(\lambda+1)^{n+1}}$$

et calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(u_\lambda|L_n)|^2$$

Comparer ce dernier résultat avec $||u_\lambda||^2$.
3) Déterminer L_0, L_1, L_2. On appelle F le sous espace vectoriel engendré par ces polynomes, déterminer $P_F(f_3)$, projection orthogonale de $f_3 : x \to x^3$ sur F.

Exercice 8

On appelle H l'espace de Hilbert des fonctions mesurables f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-t^2} dt < \infty$$

muni du produit scalaire

$$(f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)} e^{-t^2} dt$$

1) On définit

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

Déterminer H_0, H_1, H_2, H_3.
2) Déterminer une relation entre H_n, H'_n, H_{n+1}. Démontrer par récurrence que

H_n est un polynome de degré n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quel est le coefficient de degré n de H_n ?
3) On appelle f_i la fonction monome $x \to x^i$. Montrer, en effectuant n intégrations par parties, que

$$(f_k|H_n) = \begin{cases} 0 & si \quad k < n \\ n!\sqrt{\pi} & si \quad k = n \end{cases}$$

4) Déterminer a, b, c pour que l'intégrale

$$I(a,b,c) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 e^{-x^2} dx$$

soit minimale.
5) On appelle $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille orthonormée construite à partir de la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (question 3) par la méthode de Gram-Schmidt. Montrer qu'il existe un scalaire α tel que $P_n = \alpha H_n$ (on pourra écrire P_n comme combinaison linéaire de $H_0, H_1, \cdots, H_n$).

Exercice 9

On appelle H l'espace complexe des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-t^2} dt < \infty$$

muni du produit scalaire

$$(f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)} e^{-t^2} dt$$

On appelle (P_n) la suite orthonormée où P_n est un polynome réel de degré n, dont le coefficient du terme de plus haut degré est positif. (c'est la suite obtenue par la méthode de Gram-Schmidt à partir de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$). Expliciter P_0 et P_1.
1) Soit Q_{n+1} un polynome de degré $n+1$, montrer que l'on peut le mettre sous la forme

$$Q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k P_k$$

En déduire qu'il existe des constantes $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ tP_n(t) = \alpha_n P_{n+1}(t) + \beta_n P_n(t) + \gamma_n P_{n-1}(t)$$

2) Montrer que $\beta_n = 0$ On admettra que $\alpha_n = \sqrt{\frac{n+1}{2}}$ et que $\gamma_n = \alpha_{n-1}$. Expliciter les polynomes P_2 et P_3.
3) Déterminer a, b, c pour que l'intégrale

$$I(a,b,c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t^3 - (at^2 + bt + c)\right)^2 e^{-t^2} dt$$

soit minimale. Calculer alors la valeur de cette intégrale.

Exercice 10

On considère un réel $\alpha > -\frac{1}{2}$. Toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{C}$. On pose $X = [-1, 1]$ et on note dx la mesure de Lebesgue sur X.
La fonction ρ définie sur $]-1, 1[$ par $\rho(x) = (1-x)^\alpha$ est intégrable sur X et on définit la mesure μ sur X par $d\mu(x) = \rho(x)dx$, c'est la mesure de base ou de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour $s \in \mathbb{N}$ on désigne par x^s la fonction $x \to x^s$ sur X.
On notera E l'espace de Hilbert $L^2(X, \mu)$ pour le produit scalaire

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}d\mu(x) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$$

de norme associée $||f|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \rho(x)dx}$
1) On définit une suite (P_n) de polynomes sur X par

$$P_0(x) = 1 \text{ et } P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}(1-x^2)^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\left((1-x^2)^{\alpha+n}\right) \text{ si } n > 0$$

Montrer que
a) P_n est un polynome de degré n à coefficients réels.
b) $P_n(1) = 1$.
c) $(x^s|P_n) = 0$ pour $0 \leq s \leq n-1$.
2) En déduire que P_n est une famille orthogonale de E. On admettra que c'est une base Hilbertienne de E.
3) Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $\widehat{f}(n) = (f|P_n)$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\widehat{f}(n)|^2}{||P_n||^2} < \infty$$

et que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(n)}{||P_n||^2} P_n$$

converge vers f dans $(E, ||.||)$.

Exercice 11

Soit E un espace de Hilbert et λ un réel strictement positif.
1)Soit $x \in E$, on pose

$$F(y) = ||y||^2 + \lambda||y-x||^2 \ , \ y \in E$$

Montrer en utilisant le théorème de la médiane que

$$F(y) + F(z) - 2F(\frac{y+z}{2}) = \frac{1}{2}||y-z||^2 + \frac{1}{2}\lambda||y-z||^2$$

2) On pose $m(x) = \inf_{y \in E} F(y)$.
a) En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe au plus un point $y \in E$ tel que $F(y) = m(x)$.

b) Soit (y_n) une suite de points de E tels que $\lim_{n\to\infty} F(y_n) = m(x)$. (L'existence de cette suite résulte de la définition de la borne inférieure). Montrer que (y_n) est une suite de Cauchy et que si y est sa limite $F(y) = m(x)$. On notera $y = u(x)$ ce point, on a donc $F(u(x)) = m(x)$.
3) En utilisant l'inégalité $F(u(x) + ty) \geq F(u(x))$ vérifiée pour tout $y \in E$ et tout $t \in I\!R$ montrer que

$$Re\,((u(x)|y) + \lambda(u(x) - x|y)) = 0 \text{ , en déduire en remplaçant y par iy}$$

$$Im\,((u(x)|y) + \lambda(u(x) - x|y)) = 0 \text{ puis que } (u(x)|y) = \frac{\lambda}{1+\lambda}(x|y)$$

4) Déduire de la question précédente que u est linéaire, continue (on trouvera une majoration de $||u||$ en faisant $y = u(x)$) et que
$\forall x, y \in E \;\; (u(x)|y) = (x|u(y))$

Exercice 12

On appelle μ la mesure de densité $f(x) = \frac{1}{x}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0,1]$ et E est l'espace de Hilbert réel $L^2_\mu(]0,1])$, c'est à dire $E = \left\{ f :]0,1] \to I\!R |\int_0^1 |f(x)|^2 \frac{dx}{x} < +\infty \right\}$.
1) Montrer que tout polynome P tel que P(0) = 0 est élément de E.
2) Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt , appliqué à la suite x^n fournit les polynomes $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, \cdots$ obtenus de la façon suivante
a) P_k est de degré k et le coefficient de x^k est 1 .
b) $(P_i|P_j) = 0$ pour $i \neq j$.
Montrer que $(P_n|P_n) = (P_n|x^n)$ Calculer explicitement P_1, P_2, P_3 .
3) Calculer $||P_1||$ et $||P_2||$.
4) On considère $I(a,b) = ||\sqrt{x} - aP_1 - bP_2||$. Déterminer les nombres réels α et β tels que $I(\alpha,\beta) = \inf_{a,b\in I\!R} I(a,b) = I$.
5) Calculer la valeur de I .

Exercice 13

On considère un nombre réel tel que $0 < a < 1$.
1) Calculer les sommes

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{inx} \text{ et } S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{-inx}$$

En déduire le développement en série de Fourier de $f(x) = S_1(x) + S_2(x)$
2) En déduire la valeur de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\cos nt}{1 - 2a\cos t + a^2} dt$$

Exercice 14

1) Développer en série de Fourier sur l'intervalle [-1,1] la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 - x \; si \; -1 \leq x < 0 \\ 1 - x \; si \; 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

2) En déduire la valeur des sommes

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \; et \; S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 15

On considère la fonction impaire et $2\pi-$périodique f définie par $f(x) = x(\pi - x)$ pour $x \in [0, \pi]$. Montrer que

$$\forall x \in [0, \pi] \;\; x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin(2p+1)x}{(2p+1)^3}$$

En déduire les valeurs de

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} \; et \; \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^6}$$

Exercice 16

1) On considère

$$S_{n,p}(x) = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{\sin kx}{k} \ et \ V_{n,l}(x) = \sum_{k=n}^{n+l} \sin kx$$

Montrer que

$$\forall x \neq k\pi \ |V_{n,l}(x)| \leq \frac{1}{\sin(x/2)} \ et \ |S_{n,p}(x)| \leq \frac{|a_n|}{|\sin(x/2)|}$$

En déduire que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ converge uniformément sur tout intervalle $[2k\pi + \epsilon, 2(k+1)\pi - \epsilon]$ où $0 < \epsilon < \pi$
2) Montrer que la série

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

est continue sur $I\!R$ et dérivable sur $I\!R - 2\pi Z$
3) on choisit $0 < a < \pi$ et on considère la fonction $2\pi-$périodique

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad -a \leq x \leq a \\ 0 & si \quad x \in [-\pi, -a[\cup]a, \pi] \end{cases}$$

Déterminer la série de Fourier de f et monter que $\forall x \in]0, 2\pi[\ S'(x) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}$. Montrer que $\int_0^{\pi} S(x)dx = 0$ en déduire $S(x)$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 17

L'espace Hilbertien E est l'ensemble des fonctions mesurables sur $I\!R^+$ telles que $|f|^2$ soit intégrable pour la mesure de Lebesgue.
1) On définit l'opérateur u sur E par

$$uf(x) = f\chi_{[a,+\infty[}(x) \ , \ f \in E, \ a \geq 0$$

Montrer que u est une projection.
2) On définit l'opérateur V sur E par

$$Vf(x) = f(x-a)\chi_{[a,+\infty[}(x), \ f \in E, \ a \geq 0$$

Montrer que V est une isométrie.
3) Déterminer V^* adjoint de V et calculer V^*V.
4) Soit $W = VV^*$. Déterminer W^2. Calculer Wf pour $f \in E$.

Exercice 18

$E = l^2$, $A = (e_n)_{n \in I\!N^*}$ base Hilbertienne canonique de E. On définit l'opérateur u sur E par $ue_n = \lambda_n e_n, \ n \in I\!N^*$ où $(\lambda_n)_{n \in I\!N^*}$ est une suite vérifiant

$$\forall n \in I\!N^*, \ \lambda_n \neq a, \ \lim_{n \to \infty} \lambda_n = a$$

Déterminer les valeurs propres de u.

Exercice 19

1) $E = L^2([0,1])$, K fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$, pour $f \in E$ on définit

$$uf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

Montrer que u est un opérateur Hermitien sur E et que sa norme est majorée par

$$\sqrt{\iint_{[0,1]\times[0,1]} |K(x,y)|^2 \, dxdy}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés dans les deux cas suivants.
a) $K(x,y) = xy$.
b) $K(x,y) = e^{x+y}$.
2) Résoudre dans les deux cas précédents l'équation intégrale

$$uf(x) - \lambda f(x) = g(x)$$

avec
a) $g(x) = 3x - 2$.
b) $g(x) = x$.

4.9.1 Exercice 20

Soit E l'espace de Hilbert des fonctions réelles de carré intégrable. Soit A l'opérateur défini sur E par

$$Ax(t) = \int_0^{2\pi} x(s)\cos(t-s)ds$$

1) Montrer que A est Hermitien.
2) Donner l'expression de la série de fourier de Ax en fonction de celle de x.
3) Calculer $||A||^2$.
4) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Troisième partie

PROBABILITES

Chapitre 5

NOTIONS FONDAMENTALES

5.1 ENSEMBLE FONDAMENTAL. EVENEMENTS

5.1.1 Exemples

Exemple 1

On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. On cherche à décrire cette expérience aléatoire, c'est à dire due au hasard. Chaque réalisation possible sera notée sous forme de singleton, $\{1\}, \{2\}, \cdots, \{6\}$. L'ensemble des réalisations sera notée $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et appelé ensemble des états ou ensemble fondamental. Un observateur peut s'intéresser à un aspect partiel de l'expérience, par exemple au cas où le nombre qui sort est pair. On dira que l'évènement "nombre pair" est réalisé si le nombre obtenu est élément du sous ensemble $\{2, 4, 6\}$. Les évènements seront décrits par des sous ensembles de Ω. Les réalisations seront appelées évènements élémentaires ou éventualitées.

Exemple 2

On lance 2 pièces de monnaie, les éventualités pourront être notées $(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)$ si les 2 pièces peuvent être distinguées. L'évènement "On obtient au moins un pile" sera représenté par le sous ensemble $\{(P, F), (F, P), (P, P)\}$.

Exemple 3

On lance une pièce de monnaie et on s'arrête lorsqu'on obtient pile pour la première fois. On peut choisir
$\Omega = \{P, FP, FFP, \cdots, FF \cdots FP, \cdots\}$
c'est un ensemble infini. L'évènement "on a joué au plus 3 fois" s'écrit
$\{P, FP, FFP\}$.

Exemple 4

La physique conduit à considérer dans certains cas le déplacement d'une particule comme un phénomène aléatoire. Si le déplacement se fait dans le plan, l'ensemble Ω des positions possibles de la particule pourra être le plan ou une partie de celui-ci. Les évènements seront des parties du plan, mais pour des raisons mathématiques il s'agira d'un sous ensemble strict de l'ensemble des parties du plan. L'ensemble des évènements sera une tribu de parties de $I\!R^2$, par exemple $\mathcal{B}(I\!R^2)$ qui est la tribu borélienne de $I\!R^2$ ou encore la plus petite tribu contenant les ouverts de $I\!R^2$.

5.1.2 Définition

Définition 5.1 *Le couple* $(\Omega, \mathcal{E})$ *constitué par un ensemble* Ω *et une tribu de parties* $\mathcal{E}$ *de* Ω *est appelé espace probabilisable. Les éléments de* Ω *sont appelés éventualités ou évènements élémentaires. Les éléments de* $\mathcal{E}$ *sont appelés évènements.*

5.2 PROBABILITE. ESPACE PROBABILISE

5.2.1 Définition

Définition 5.2 *Une probabilité* P *sur un espace probalisable* $(\Omega, \mathcal{E})$ *est une mesure sur cet espace (qui est mesurable) telle que* $P(\Omega) = 1$.

Exemples
L'ensemble Ω est fini ou infini dénombrable.
Dans ce cas on choisit en général $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$. Une probabilité sur Ω est définie par la donnée d'une famille
$\{P(x) = \alpha_x, x \in \Omega\}$ de nombres réels vérifiant la condition
$\sum_{x\in\Omega} \alpha_x = 1$.
Dans le cas particulier où Ω est fini on appelle probalité uniforme sur Ω la probabilité correspondant à $\alpha_x = 1/Card\Omega$.
Pour $A \subset \Omega, P(A) = CardA/Card\Omega$. cette probabilité correspond au tirage d'un point au hasard dans Ω.
Exemple
On lance n fois une pièce équilibrée. On prend
$\Omega = \{P, F\}^n,\ \alpha_x = 1/2^n$. L'évènement A="On obtient 3 piles en n lancers " a pour probabilité $P(A) = C_n^3/2^n$ pour $n \geq 3$.
L'ensemble $(\Omega, \mathcal{E})$ est $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$
On considère une fonction mesurable positive h vérifiant $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = 1$. Pour tout élément $A \in \mathcal{B}(I\!R)$ on définit une probabilité par $P(A) = \int_A h(x)dx$.

5.2.2 Propriétés des probabilités

$.\forall A \in \mathcal{E}\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
$.P(\emptyset) = 0$.
$.\forall A, B \in \mathcal{E}\ A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
$.\forall A, B \in \mathcal{E}\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Pour démontrer ce dernier résultat il suffit d'écrire
$A \cup B = (A - A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (B - A \cap B)$ et de remarquer que si
$D, C \in \mathcal{E}, C \subset D$ on a $P(C - D) = P(C) - P(D)$. Ce résultat admet la généralisation suivante, dont la démonstration se fait par récurrence.

Théoreme 5.1 *Pour n évènements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ on a*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_n^k$$

avec

$$S_n^k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots \leq i_n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

Exemple.
On dispose de 2 jeux de 52 cartes et on tire une carte de chaque jeu. Quelle est la probabilité d'avoir tiré au moins un roi ?

On choisit $\Omega = \{(a, b) | a \ cartedupremierjeu, \ b \ cartedudeuxiemejeu\}$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P = probabilité uniforme sur Ω.

Première méthode

Définissons les évènements suivants :
A_1 = "On tire un roi du premier jeu et une carte autre qu'un roi du deuxième jeu".
A_2 = "On tire un roi du deuxième jeu et une carte autre qu'un roi du premier jeu".
A_3 = "On tire un roi du premier jeu et un roi du deuxième jeu".

$P(A_1) = P(A_2) = (4.48)/52^2 = 192/2704$ $P(A_3) = 16/2704$. A = "au moins un roi" $= A_1 \cup A_2 \cup A_3$, ces 3 évenements étant 2 à 2 disjoints on a $P(A) = 400/2704$.

Deuxième méthode

$P(\overline{A}) = P($ "aucun roi"$)=48^2/2704 = 2304/2704$
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 400/2704$.

5.3 PROBABILITE CONDITIONNELLE

5.3.1 Exemple.

Une entreprise achète 1000 pièces détachées à un fournisseur A_1 dont 5 pour cent sont défectueuses et 4000 à un fournisseur A_2 dont 3 pour cent sont défectueuses. Une piéce choisise au hasard est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne du fournisseur A_1 ?

Définissons les évènements suivants :
Ω = "ensemble des pièces détachées".
D = "ensemble des pièces défectueuses".
A_i = "ensemble des pièces provenant du fournisseur A_i, $i = 1, 2$.

L'ensemble D devient l'évènement certain.
$Card \ D = 0,05.1000 + 0,03.4000 = 170$. A_1 contenant 50 pièces défectueuses, la probabilité cherchée est
$50/170 = \frac{50/5000}{170/5000} = P(A_1 \cap D)/P(D)$.

5.3.2 Définition.

Définition 5.3 *Soit* $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ *un espace probabilisé et* A *un évènement de probabilité non nulle,* $F \in \mathcal{E}$*, on appelle probabilité conditionnellede* F *par rapport à* A *ou probabilité conditionnelle de* F *sachant* A *le nombre*

$$P(F|A) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)}.$$

Conséquence. Sous les hypothèses précédentes on a $P(F \cap A) = P(F|A)P(A)$. Ce résultat peut être généralisé par récurrence à n évènements $A_1, A_2, \cdots, A_n$.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap A_{n-1}).$$

Exemples.
On tire successivement et sans remise 3 cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir tiré 3 rois ?
Posons $A_i =$ "on tire un roi au ième tirage", $i = 1, 2, 3$.
La probabilité cherchée est

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) = 4/52.3/51.2/50.$$

On considère la composition en garçons et filles d'une famille de 2 enfants. Un ensemble fondamental est
$\Omega = \{(G, G), (G, F), (F, G), (F, F)\}$. Calculons la probabilité des évènements suivants :
$H =$ "la famille a un garçon".
$A =$ "l'aîné est un garçon".
$B =$ "les 2 enfants sont des garçons".

$$P(B|H) = \frac{P(B \cap H)}{P(H)} = 1/3 \ , \ P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1/2.$$

Cet exemple montre l'importance de bien poser le problème et de se méfier de l'intuition dans les calculs de probabilité conditionnelle.

5.3.3 Théorème de Bayes

Théoreme 5.2 *On considère* $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ n *évènements constituant une partition de* Ω *tels que* $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$*. Pour tout évènement* A *on a*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|A_i)P(A_i) \ \ \textit{et si} \ \ P(A) \neq 0$$

$$P(A_j|A) = \frac{P(A|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|A_i)P(A_i)}.$$

Ce résultat est immédiat en remarquant que
$A = \cup_{i=1}^{n}(A \cap A_i)$ et que ces évènements sont deux à deux disjoints.
Exemple.
Une urne A_1 contient 70 pour cent de boules blanches et une urne A_2 80 pour

cent de boules blanches. L'urne A_1 contient trois fois plus de boules que l'urne A_2. On mélange les contenus de A_1 et de A_2 et on choisit une boule au hasard, elle est blanche, quelle est la probabilité qu'elle provienne de A_1 ?

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)} = \frac{0,7.0,75}{0,7.0,75 + 0,8.0,25} = 21/29.$$

5.3.4 Evènements indépendants.

Définition 5.4 *Soit* $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ *un espace probabilisé et* $A, B \in \mathcal{E}$. *Ces 2 évènements sont indépendants si* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Conséquence.
Dans le cas où ces probabilités sont définies on a $P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(A)$ quand A et B sont indépendants. Autrement dit la réalisation de l'un des évènements n'influe pas sur la probabilité qu'a l'autre de se réaliser.

Définition 5.5 *Deux tribus* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$, *sous ensembles de* $\mathcal{E}$, *sont indépendantes si*

$$\forall A \in \mathcal{A} \ , \ \forall B \in \mathcal{B} \ P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Théoreme 5.3 *L'indépendance des évènements* A *et* B *entraîne l'indépendance de* $\overline{A}$ *et* B, *de* A *et* $\overline{B}$, *de* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$, *c'est à dire des tribus* $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ *et* $\mathcal{B} = \{\emptyset, B, \overline{B}, \Omega\}$ *engendrées par* A *et* B *respectivement.*

Montrons l'indépendance de $\overline{A}$ et B, les autres cas se traitant de la même manière.
$(\overline{A} \cup A) \cap B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B) = B$.
$P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)$.
$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = p(B) - p(A)P(B)$.
$P(\overline{A} \cap B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\overline{A})$.

Définition 5.6 *Les évènements* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *sont indépendants si les tribus engendrées respectivement par* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *sont indépendantes. Il revient au même de dire*

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\} \ , \ P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$

pour toute suite $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

Chapitre 6

VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

6.1 LOI DE PROBABILITE

6.1.1 Mesure image et mesure définie par une densité

Mesure image.

Définition 6.1 *On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et un espace mesurable $(Y, \mathcal{B})$, h étant une application mesurable de X vers Y, on appelle mesure image de μ par h la mesure notée $\nu = h(\mu)$ définie sur $(Y, \mathcal{B})$ par $\nu(B) = \mu(h^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{B}$.*

Théoreme 6.1 *Pour toute fonction f positive et ν-mesurable sur Y on a*

$$\int_Y f d\nu = \int_X (f \circ h) d\mu$$

<u>Démonstration</u>
Le théorème est vrai pour les fonctions indicatrices d'ensembles χ_B avec $B \in \mathcal{B}$, donc également pour toute fonction étagée, puis pour pour toute fonction mesurable positive en utilisant une suite croissante de fonctions étagées convergeant vers cette fonction.

Corollaire 6.1.1 *Une fonction f réelle ou complexe $\mathcal{B}$-mesurable sur Y est ν-intégrable si et seulement si $f \circ h$ est μ-intégrable et dans ce cas*

$$\int_Y f d\nu = \int_X (f \circ h) d\mu.$$

<u>Démonstration</u>
Le résultat est vrai pour les fonctions positives d'après le théorème précédent, si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ on applique le résultat à f^+ et f^-, si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ on utilise Ref et Imf.

Mesures de base donnée

Définition 6.2 *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* g *une fonction mesurable positive sur* X*. On appelle mesure de base (ou de poids)* g *par rapport à la mesure* μ*, la fonction d'ensembles définie sur* $\mathcal{A}$ *par* $\nu(E) = \int_E g d\mu$, $E \in \mathcal{A}$*.*

La fonction ν est bien une mesure car si les ensembles mesurables A_n sont deux à deux disjoints on obtient

$$\nu(\cup_n E_n) = \int (\chi_{\cup_n E_n}) g d\mu = \int \left(\sum_n \chi_{E_n} \right) g d\mu = \sum_n \int_{E_n} g d\mu = \sum_n \nu(E_n)$$

L'avant dernière égalité est une conséquence du théorème de Beppo-Levi. La mesure ν est notée $\nu = g\mu$.

Théoreme 6.2 *On a pour toute fonction mesurable positive* f

$$\int f d\nu = \int f g d\mu$$

où ν *est la mesure de base* g *par rapport à* μ*.*

La démonstration est similaire à celle du théorème précédent.

Corollaire 6.2.1 *La fonction* f *est* ν*-intégrable si et seulement si* fg *est* μ*-intégrable et*

$$\int f d\nu = \int f g d\mu$$

Remarque.
Dans le cas d'un ensemble mesurable E tel que $\mu(E) = 0$ on a alors $\nu(E) = 0$. On exprime ceci en disant que ν est absolument continue par rapport à μ.

6.1.2 Variable aléatoire

Définition 6.3 *Soit* $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ *un espace probabilisé et* $(E, \mathcal{B})$ *un espace mesurable. Une application mesurable* $X : \Omega \to E$ *est appelée varible aléatoire. Si* E *est dénombrable (en général* $E = \mathbb{Z}$ *ou* $E = \mathbb{N}$*) on dit que* X *est une variable aléatoire discrète. Dans ce cas on prend en général* $\mathcal{B} = \mathcal{P}(E)$*.*

Notations.
$I \subset E$, $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in I\}$ est noté $[X \in I]$
$n \in E$, $X^{-1}(\{n\}) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = n\}$ est noté $[X = n]$.

6.1.3 Loi de probabilité.

Définition 6.4 *La loi de probabilité de la variable aléatoire discrète* X *est la mesure image de* P *par* X*. C'est une probabilité sur* $(E, \mathcal{B})$ *notée* p_X*. L'espace* $(E, \mathcal{B}, p_X)$ *est un espace probabilisé.*

Remarque.
$B \in \mathcal{B}$, $p_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P([X \in B])$.
Dans le cas où $\mathcal{B} = \mathcal{P}(E)$ et $n \in E$, $p_X(\{n\})$ est noté $p_X(n) = P([X = n])$. Dans ce cas
$B \subset E$, $p_X(B) = \sum_{n \in B} p_X(n)$.

Exemple.
On lance 3 dés de couleurs différentes et on appelle X le nombre de 6 obtenus. Modélisons cette expérience.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3 \ , \ \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega) \ , \ P = \text{probabilité uniforme sur } \Omega$$

$$X((a,b,c)) ='' \text{nombre de six parmi } a,b,c'' \ , \ E = \{0,1,2,3\} \ , \ \mathcal{B} = \mathcal{P}(E)$$

$p_X(0) = 125/216$, $p_X(1) = 75/216$, $p_X(2) = 15/216$, $p_X(3) = 1/216$.

6.1.4 Fonction de répartition.

Définition 6.5 *La fonction de répartition de la variable aléatoire X est la fonction définie par $F_X(x) = P([X < x]) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\})$.*

Propriétés.

— $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
— F_X est croissante.
— $\cup_{n=1}^{\infty} [X < x - 1/n] = [X < x]$ entraine $\lim_{n \to \infty} F_X(x-1/n) = F_X(x)$, la fonction F_X est donc continue à gauche en tout point.
— En faisant un raisonnement analogue au précédent on obtient $\lim_{n \to \infty} F_X(x + 1/n) = F_X(x) + P(\{x\})$. L fonction F_X est continue à droite en x si et seulement si $P(\{x\}) = 0$.

Exercice.
Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire définie dans l'exemple précédent.

6.2 ESPERANCE MATHEMATIQUE. VARIANCE.

6.2.1 Espérance mathematique.

Définition 6.6 *L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre $E(X) = \int_\Omega X dP$ si X est intégrable.*

Conséquence.
p_X étant la loi image de P par X on a $E(X) = \int_E x dp_X(x)$. Si X est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ on a $E(X) = \sum_{x \in E} x p_X(x)$, ceci correspond à la moyenne pondérée (ou barycentre) des valeurs prises par X.

6.2.2 Fonction génératrice.

Nous allons dans ce paragraphe introduire un outil qui facilitera le calcul de l'espérance mathématique et de la variance pour une variable aléatoire discrète.

Définition 6.7 *La variable aléatoire X étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction génératrice de X est la série entière*

$$G_X(z) = \sum_{k \in E} p_X(k) z^k$$

le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à 1 car $G_X(1) = 1$. Si $R > 1$ $G'_X(1) = \sum_{k \in E} k p_X(k) = E(X)$.

<u>Exemple.</u>
$E = \mathbb{N}^*$, $p_X(k) = q^{k-1} p$, $(p + q = 1)$.

$$G_X(z) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p z^k = pz \sum_{k=1}^{\infty} (qz)^{k-1} = \frac{pz}{1 - qz}$$

$E(X) = G'_X(1) = \frac{p}{(1-q)^2}$.

6.2.3 Propriétés de l'espérance mathématique.

— Si X et Y sont deux variables aléatoires on a

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \ , \ E(aX) = aE(X) \ (a \in \mathbb{R})$$

— E et F étant $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$, $g : E \to F$ une application et X une variable aléatoire discrète on a

$$E(g \circ X) = E(g(X)) = \sum_{k \in E} g(k) p_X(k)$$

Le premier résultat provient de la linéarité de l'intégrale et le deuxième des égalités

$$E(g(X)) = \int_{\Omega} g(X) dP = \int_E g(x) dp_X(x)$$

car p_X est la mesure image de P par X.
<u>Exemples.</u>
$E(X^n) = \sum_{k \in E} k^n p_X(k)$.
$E(e^X) = \sum_{k \in E} e^k p_X(k)$.

6.2.4 Variance.

Définition 6.8 *Une variable aléatoire X vérifiant $E(X^2) < +\infty$ on définit la variance de X par $Var(X) = E((X - E(X))^2)$. Cette quantité mesure la dispersion (en fait le carré de la dispersion) moyenne des valeurs de X par rapport à l'espérance mathématique $E(X)$. L'écart type de X est la quantité $\sigma(X) = \sqrt{var(X)}$.*

La fonction génératrice peut permettre de calculer la variance car
$\phi''_X(1) = \sum_{k\geq 2} k(k-1) = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$. Ceci suppose que le rayon de convergence R soit supérieur strictement à 1.
Covariance de deux variables aléatoires.

Définition 6.9 $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{E}, P) \Rightarrow XY \in L^1(\Omega, \mathcal{E}, P)$. *Ceci permet de définir la covariance des variables aléatoires x et Y par*
$Cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY)\text{-}E(X)E(Y)$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraine
$|\text{Cov}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$.

Définition 6.10 *Le coefficient de corrélation de deux variables aléatoires X et Y qui ne sont pas presque surement constantes est*

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \ , \ |\rho(X,Y)| \leq 1$$

Ce coefficient mesure le degré de dépendance linéaire de X et Y.

Théoreme 6.3 *On considère deux variables aléatoires X et Y telles que $E(X^2) < +\infty$ et $E(Y^2) < +\infty$.*

1. *$Var(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est constante P presque surement.*
2. *$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$.*
3. *$\rho(X,Y) =^{+}_{-} 1 \Leftrightarrow (\exists (a,b,c) \in I\!R^3 - (0,0,0) | aX + bY + c = 0 \ P \ p.s.)$.*

6.3 Lois de probabilités discrètes usuelles

6.3.1 Loi de Bernoulli.

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues, par exemple jeu de pile ou face, tirer un roi ou une autre carte dans un jeu de carte... Ces deux possibilités sont en général notées 0 et 1 et appelées échec ou succès. La variable aléatoire $X : \Omega \to \{0,1\}$ est appelée variable de Bernoulli. Sa loi est définie par $p = P([X=0])$, $q = 1 - p = P([X=1])$. On dit que p est le paramètre associé à X.
$E(X) = p$, $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$.

6.3.2 Loi Binomiale.

On répète n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p, X est le nombre de 1 obtenus ($0 \leq X \leq n$). On appelle A l'évènement "On obtient 1 ". La loi suivie par X est appelée loi binomiale de paramètres n , p et notée $B(n,p)$.
L'écriture $X \sim B(n,p)$ signifie que X suit la loi binomiale $B(n,p)$.

$p_X(k) = P([X = k]) = P($"réaliser k fois $A) = C_n^k p^k q^{n-k}$
car les répétitions sont indépendantes. $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$.

$\phi_X(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} z^k = (pz + q)^n$.
$E(X) = \phi'_X(1) = np$, $E(X^2) = \phi''_X(1) + E(X) = n(n-1)p^2 + np$,
$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = np(1-p) = npq$.

6.3.3 Loi géométrique.

On répète une épreuve de Bernoulli, de paramètre p et on s'arrête dès que l'on obtient 1. On appelle X le nombre de répétitions nécessaires. La loi de X est appelée loi géométrique de paramètre p. Les valeurs prises par X sont les éléments de $\mathbb{N}^*$.

$k \in \mathbb{N}^*$, $p_X(k) = q^{k-1}p$
car ceci revient à faire $k-1$ répétitions de $\overline{A}$ la k-ième répétitions donnant A.

On a montré dans un exemple précédent que
$\phi_X(z) = pz/(1-qz)$ d'où
$\phi'_X(z) = p/(1-qz)^2$, $\phi''_X(z) = 2pq/(1-qz)^3$.
$E(X) = \phi'_X(1) = 1/p$, $E(X^2) = \phi''_X(1) + E(X) = 2q/p^2 + 1/p$
$Var(X) = q/p^2$.

6.3.4 Loi hypergéométrique.

On choisit n objets parmi $N \geq n$ objets de deux types notés I et II. X représente le nombre d'objets de type I parmi les n objets. Il existe d objets de type I.

$$p_X(k) = \frac{C_n^k C_{N-d}^{n-k}}{C_N^n} \ , \ \max(0, n-(N-d)) \leq k \leq \min(n, d)$$

6.3.5 Loi de Poisson.

C'est une loi utile pour l'étude des phénomènes de files d'attente. L'ensemble des valeurs prises par X est $\mathbb{N}$ et

$$p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \ , \ k \in \mathbb{N} \ , \ \lambda > 0$$

$\phi_X(z) = e^{-\lambda(z-1)}$ d'où $E(X) = Var(X) = \lambda$.

6.4 COUPLE DE VARIABLES ALEATOIRES

Les variables aléatoires discrètes X et Y étant définies sur $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ et à valeurs dans les ensembles dénombrables E et F respectivement, on définit une variable aléatoire discrète $Z = (X, Y)$ à valeurs dans $E \times F$ en posant $Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$. On a en effet
$\{\omega \in \Omega | Z(\omega) = (x, y)\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\} \cap \{\omega \in \Omega | Y(\omega) = y\} \in \mathcal{E}$.

Définition 6.11 *La loi de probabilité de Z est appelée loi conjointe du couple (X,Y) et les lois des variables X et Y sont appelées lois marginales du couple de variables aléatoires.*

Il est possible de connaitre les lois marginales lorsque l'on connait la loi conjointe.

Théoreme 6.4

$$p_X(x) = \sum_{y\in F} p_Z(x,y)\ ,\ x\in E\ ,\ p_Y(y) = \sum_{x\in E} p_Z(x,y)\ ,\ y\in F$$

Ce résultat est obtenu en remarquant que

$$p_X(x) = p_Z(\{x\}\times F) = \sum_{x=x}\sum_{y\in F} p_Z(x,y)\ ,\ p_Y(y) = p_Z(E\times\{y\}) = \sum_{x\in E}\sum_{y=y} p_Z(x,y)$$

X et Y étant deux variables aléatoires discrètes, $X^{-1}(\mathcal{P}(E))$ et $Y^{-1}(\mathcal{P}(F))$ sont deux sous tribus de $\mathcal{E}$ appelées respectivement tribus engendrées par X et par Y.

Définition 6.12 *Les variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont indépendantes si les n tribus qu'elles engendrent sont indépendantes.*

Théoreme 6.5 *Les variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si*

$$\forall (x,y)\in E\times F\ P([Z=(x,y)]) = P([X=x])P([Y=y])\ ,\ \textit{ou encore}\ \ p_Z(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$$

La vérification de ce théorème est simple et laissée en exercice. Ce résultat exprime le fait que la mesure p_Z sur $E\times F$ est le produit des mesures p_X sur E et p_Y sur F.

Théoreme 6.6 *Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes on a $E(XY) = E(X)E(Y)$ si X et Y sont intégrables.*

Les variables aléatoires étant indépendantes on a $p_Z = p_X \otimes p_Y$.
$E(XY) = \int_{E\times F} xy dp_X(x)dp_Y(y) = \int_E x dp_X(x) \int_F y dp_Y(y)$ d'après le théorème de Fubini. Ce résultat peut être redémontré directement en écrivant la première intégrale sous forme d'une série double.
Remarque.
La réciproque de ce théorème est fausse comme le montre l'exemple suivant.
$E = F = \{-1,0,1\}$, $p_Z(-1,0) = p_Z(1,0) = p_Z(0,-1) = p_Z(0,1) = 1/4$, les 5 autre valeurs étant nulles.
$E(XY) = \int_{x\in E}\int_{y\in F} xy dp_Z(x,y) = \sum_{x\in E}\sum_{y\in F} xy p_Z(x,y) = 0$ car dans chaque terme de la somme un des facteurs est nul.
Par symétrie les lois marginales de X et de Y sont identiques.
$p_X(-1) = p_Z(-1,-1) + p_Z(-1,0) + p_Z(-1,1) = 1/4$
$p_X(0) = p_Z(0,-1) + p_Z(0,0) + p_Z(0,1) = 1/2$
$p_X(1) = 1 - (1/4 + 1/2) = 1/4$.
$E(X) = -1/4 + 0 + 1/4 = E(Y) = 0$. On a bien
$E(XY) = E(X)E(Y)$ et pourtant $p_Z(0,0) = 0 \neq p_X(0)p_Y(0)$, ce qui montre

que X et Y ne sont pas indépendantes.
Remarque.
Si les variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendandantes, il en est de même de $f \circ X$ et $g \circ Y$ où f et g sont des applications de E et F respectivement vers des ensembles dénombrables. Ceci provient de l'égalité $(f \circ X)^{-1}(A) = X^{-1}(f^{-1}(A))$ qui est donc élément de la tribu engendrée par X. En particulier, dans ce cas
$Cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y_E(Y))) = E(X - E(X))E(Y - E(Y)) = 0$
d'après le théorème précédent. Deux variables aléatoires indépendantes ayant une covariance nulle (on dit qu'elles sont non correlées) on a aussi
$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ quand elles sont indépendantes.

Théoreme 6.7 *Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. On a la relation suivante entre fonctions génératrices*

$$\phi_{X+Y}(z) = \phi_X(z)\phi_Y(z)$$

La réciproque de ce théorème est fausse.
On a en effet $\phi_{X+Y}(z) = E(z^{X+Y}) = E(z^X)E(z^Y)$ d'après une remarque précédente concernant $f(X)$ et $g(Y)$, X et Y étant indépendants.
Exemple.
X et Y étant deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Poisson de paramètre λ, $\phi_{X+Y}(z) = e^{2\lambda(z-1)}$, la variable aléatoire $X + Y$ suit donc une loi de Poisson de paramètre 2λ car une fonction génératrice est caractéristique d'une loi.

Chapitre 7

VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES

7.1 LOI DE PROBABILITE

7.1.1 Généralités.

Définition 7.1 *Une variable aléatoire continue X est une application mesurable d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ vers $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$ où $\mathcal{B}(I\!R)$ est la tribu des boréliens de $I\!R$. On appelle loi de probabilité de X la mesure image p_X de P par X. Cette mesure admet en général une densité g par rapport à la mesure de Lebesgue sur $I\!R$, appelée densité de X.*

Remarques.

— Si X admet une densité g on a alors
$\forall A \in \mathcal{B}(I\!R)$, $p_X(A) = \int_A g(x)dx$.
— Si F_X est la fonction de répartition de X on a
$F_X(t) = P([X < t]) = p_X(]-\infty, t[) = \int_{-\infty}^{t} g(t)dt$ d'où $F'_X(t) = g(t)$ si g est continue.
— Une variable aléatoire continue X peut être définie à partir de sa fonction de répartition ou de sa densité, mais par contre $P([X = x]) = 0$ en général (c'est toujours le cas quand on a une densité continue).
— une fonction g est une densité si et seulement si
$\forall x \in I\!R\ f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1$.

Les proprétés de la fonction de répartition sont les mêmes que dans le cas discret.

7.1.2 Espérance mathémtique et variance

Les définitions des espérance mathématiques et variance sont identiques à celles présentées dans le chapitre précédent. Dans le cas continu on obtient pour une variable intégrable

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega)dP(\omega) = \int_{I\!R} x dp_X(x) = \int_{I\!R} x g(x)dx$$

d'après les propriétés d'une mesure image et d'une mesure à densité.
Si $h$est une fonction réelle continue par morceaux on a de même

$$E(h \circ X) = E(h(X)) = \int_{\Omega} h \circ X(\omega) dP(\omega) = \int_{I\!R} h(x)g(x)dx$$

sous réserve que $h \circ X$ soit intégrable.

7.2 Lois continues usuelles

7.2.1 Loi Exponentielle.

On appelle loi exponentielle de paramètre λ la loi de densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \chi_{I\!R^+} \ , \ \lambda > 0$$

elle est notée Exp(λ).

$$E(X) = \int_{I\!R} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = 1/\lambda$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = 1/\lambda^2 \ , \ Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1/\lambda^2$$

7.2.2 Loi uniforme sur $[a, b]$.

La densité de cette loi est

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \, \chi_{[a,b]}(x) \ , \ P([a \leq X \leq b]) = \frac{d-c}{b-a} \ , \ a \leq c < d \leq b$$

autrement dit cette probabilité est proportionnelle à la longueur de l'intervalle et ne dépend pas de la position des points dans $[a, b]$.

7.2.3 Loi normale ou loi de Gauss.

Une loi normale ou loi de Gauss de paramètres μ, σ est une loi de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

où $\sigma > 0$.
Dans le cas particulier où $\mu = 0, \ \sigma = 1$, on dit que c'est une loi normale centrée réduite.

Théoreme 7.1 *Si X suit une loi normale de paramètres μ, σ, $Y = (X - \mu)/\sigma$ suit une loi normale centrée réduite.*

En effet $F_Y(t) = P(Y < t) = P(X < \sigma t + \mu) = F_X(\sigma t + \mu)$. En dérivant on obtient $f_X(t) = \sigma f_X(\sigma t + \mu) = 1/\sqrt{2\pi} e^{-t^2/2}$ ce qui est la densité de la loi normale centrée réduite.
Remarque : un calcul rapide donne $E(Y) = 0$ et $Var(Y) = 1$, ce qui entraine $E(X) = E(\sigma Y + \mu) = \mu$ et $Var(X) = \sigma^2 Var(Y) = \sigma^2$.

7.2.4 Loi Gamma.

La fonction d'Euler de seconde espéce est définie par

$$\Gamma(u) = \int_0^{+\infty} x^{u-1} e^{-x} dx$$

On vérifie que l'intégrale est convergente si et seulement si $u > 0$. Une intégration par partie donne $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u)$, ce qui entraine $\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}^*$.On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi Gamma de paramètres $\lambda > 0,\ \alpha > 0$ si sa densité est

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \chi_{\mathbb{R}^+}(x)$$

Un calcul simple donne $E(X) = \alpha/\lambda$, $Var(X) = \alpha/\lambda^2$. La loi exponentielle est un cas particulier de loi Gamma correspondant à $\alpha = 1$.

7.3 Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

7.3.1 Lois de probabilités.

Une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ peut être représentée par $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$. La mesure image de P par X est appelée loi de X ou loi conjointe du n-uple $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$. Les lois des variables aléatoires X_i, à valeurs dans $\mathbb{R}$, sont appelées lois marginales. La loi de X est notée p_X et la loi de X_i p_{X_i}. On traitera dans la suite le cas $n = 2$ pour simplifier les notations et on supposera que p_X admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\ ,\ p_X(B) = \iint_B f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Théoreme 7.2 *La densité de la variable aléatoire X_1 est $f_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) dx_2$*

On a en effet pourB_1 borélien de $\mathbb{R}$

$$p_{X_1}(B_1) = p_X(B_1 \times \mathbb{R}) = \int_{B_1} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) dx_2 \right] dx_1$$

On a un résultat analogue pour p_{X_2}.

7.3.2 Fonction de répartition.

Définition 7.2 *On appelle fonction de répartition de $X = (X_1, X_2)$ la fonction définie par $F_X(t_1, t_2) = P(X_1 < t_1, X_2 < t_2)$*

La fonction F étant deux fois continument différentiable, on vérifie, en calculant l'intégrale, que

$$P(a \le X_1 < b, c \le X_2 < d) = \iint_{[a,b[\times[c,d[} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2$$

Les rectangles $[a, b[\times[c, d[$ engendrant la tribu boélienne de $I\!R^2$ ceci permet d'obtenir la densité f de X par la formule

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

7.3.3 Somme de variables aléatoires indépendantes.

Deux variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes, comme dans le cas discret, si les tribus engendrées par X et Y sont indépendantes, ou encore si $p_X = p_{X_1} \otimes p_{X_2}$ ce qui est équivalent à $F_Z(x, y) = F_X(x)F_Y(y),\ Z = (X, Y)$ ou à $f_Z(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.

Théoreme 7.3 *Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, on a :*
- — $E(XY) = E(X)E(Y)$.
- — $Var(X+Y)=Var(X) + Var(Y)$.
- — $Cov(X, Y)=0$.

la deuxième et la troisième égalité sont des conséquences de la première qui se démontre à l'aide duthéorème de Fubini.

Théoreme 7.4 *En posant $S = X + Y$ on a*

$$f_S(t) = \int_{-\infty}^{t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(u-x)dx \right) du$$

ce qui exprime que f_S est le produit de convolution de f_X et f_Y.

Démonstration.

$$F_S(t) = P(S < t) = \iint_{(x,y),\ x+y<t} f_X(x)f_Y(y)dxdy = \int_{I\!R} \left(\int_{-\infty}^{t-x} f_X(x)f_Y(y)dy \right) dx$$

En posant $y = u - x$ on obtient

$$F_S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{t} f_X(x)f_Y(u-x)du \right) dx = \int_{-\infty}^{t} \left(\int_{I\!R} f_X(x)f_Y(u-x)dx \right) du.$$

7.4 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire.

Définition 7.3 — *X étant une variable aléatoire réelle, sa fonction caractéristique est définie par*

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int eitx f_X(x)dx.$$

— *$Z = (X, Y)$ étant une variable aléatoire à valeurs dans $I\!R^2$, sa fonction caractéristique est définie par*

$$\phi_Z(t, v) = E(e^{i(tX+vY)}) = \iint e^{i(tx+vy)} f_Z(x, y)dxdy.$$

Exemple.
Loi uniforme sur $[-A, A]$. un calcul simple donne

$$\phi_X(t) = \frac{\sin At}{At}$$

Loi normale centrée réduite.
Un calcul uilisant les propriétés des fonctions holomorphes donne

$$\phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Propriétés.

- Si $Y = aX + b$, $\phi_Y(t) = e^{ibt}\phi_X(at)$.
- $\phi_{X+Y}(t) = \phi_{(X,Y)}(t, t)$.
- Si $X \in L^1$ le théorème de dérivation sous le signe somme donne $\phi'_X(0) = iE(X)$.
- Si $X \in L^2$, une nouvelle application de ce théorème donne $\phi''_X(0) = -E(X^2)$.

Le premier résultat permet de calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ, car dans ce cas $X = \sigma Y + \mu$ avec Y variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.
$\phi_X(t) = e^{i\mu t-(\sigma^2 t^2)/2}$.

Le théorème qui suit, qui est donné sans démonstration, montre que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire détermine totalement sa loi.

Théoreme 7.5 *Si ϕ_X, fonction caractéristique de la variable aléatoire réelle X est intégrable sur $\mathbb{R}$, on a*

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_X(t)e^{-itx}dt.$$

Théoreme 7.6 *Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, on a*

$$\phi X + Y(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t).$$

Ceci provient de l'égalité $E(e^{it(X+Y)}) = E(e^{itX})E(e^{itY})$ provenant de l'indépendance des variables aléatoires e^{itX} et e^{itY}.
Il faut noter que la réciproque de ce théorème est fausse. En effet, si X suit la loi de Cauchy de densité $f(x) = 1/(\pi(1 + x^2))$, $\phi_X(t) = e^{-t}$ et $\phi_{2X}(t) = \phi_X(2t) = e^{-2t} = (\phi_X(t))^2$.

7.5 Exercices.

Exercice 1

Une urne contient r boules blanches et s boules noires. On extrait simultanément, au hasard, n boules, $1 \le n \le r+s$ et on s'intéresse au nombre de boules blanches tirées.
1) Comment modéliser cette expérience ? (Choix de l'ensemble fondamental Ω et de la probabilité P).
2) Quel est en fonction de r, s, et n, l'ensemble $\mathcal{V}$ des valeurs possibles prises par le nombre de boules blanches tirées ?
3) On note A_k l'évènement "Parmi les n boules tirées figurent k boules blanches". Calculer $P(A_k)$, $k \in \mathcal{V}$.
4) Quelle relation obtient on sur les coefficients binomiaux ?

Exercice 2

Le jeu du Loto consiste à deviner les 6 entiers qui vont être tirés au hasard parmi les entiers $\{1, 2, \cdots, 49\}$. On ne tient pas compte ici du numero complémentaire.
1) Comment modéliser le tirage de 6 entiers parmi les 49 premiers entiers naturels non nuls ?
2) Le joueur propose un tirage. On considère les évènements suivant :

— $A_k =$ "avoir deviner exactement k bons numéros", $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
— $P =$"perdre"="avoir deviné 0, 1 ou 2 bon(s) numéro(s)".
— $G =$"gagner"="avoir au mois 3 bons numéros".

Calculer la probabilité de ces évenements.

Exercice 3

On dispose de 10 cartes numérotées de 1 à 10. On tire successivement, au hasard, chacune des 10 cartes.
Modéliser cette expérience. On appelle A_k l'évènement "la kième carte tirée porte le numéro k", $k \in \{0, 1, \cdots, 10\}$. Calculer la probabilité de A_k.
Calculer $P(A_i \cap A_j)$, $i \neq j$, puis $P(\overline{A_i} \cap A_j)$ et $P(\overline{A_i} \cap \overline{A_j})$.

Exercice 4

Une urne contient $n \in I\!N^*$ boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard. $p_1, p_2, \cdots, p_r$ étant les diviseurs premiers de n, on note A_{p_i} l'évenement le numéro porté par la boule tirée est divisible par p_i.
1) Calculer $P(A_{p_i})$, $1 \le i \le r$. Montrer que les évènements A_{p_i} sont indépendants dans leur ensemble.
2) Calculer la probabilité de l'évènement $A =$ "le numéro porté par la boule tirée est premier avec n" (il n'est divisible par aucun p_i). En déduire le nombre $\phi(n)$ des entiers plus petits que n et premiers avec n (la fonction $\phi(n)$ est appelée fonction d'Euler et joue un rôle important en arithmétique).

Exercice 1

Une urne contient des boules blanches (1/3) et des boules noires (2/3). On tire une boule. Si elle est blanche, le jeu est terminé. Si elle est noire, on la remet et on procède à un nouveau tirage et ceci jusqu'à l'obtention d'une boule blanche, le jeu est alors terminé. On appelle X le nombre de tirages à effectuer pour voir le jeu se terminer.
1) Quelle est la loi suivie par X. déterminer son espérance mathématique et calculer $P([X \leq 3])$ et $P([X > 4])$
2) Le gain étant de trente francs si la boule blanche sort au premier ou au deuxième coup, vingt francs au troisième, dix francs si elle sort au quatrième et cinq francs ensuite et sachant qu'il faut payer dix francs pour procéder à un tirage, le jeu est-il équitable ? (c'est à dire a-t-on $E(Z) = 0$ en appelant Z le bilan global) .
N.B. : En appellant Y le gain obtenu, déterminer la loi de Y et écrire une relation entre X , Y et Z .

Exercice 2

La loi de probabilité d'une variable aléatoire continue est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} r\lambda^r \frac{1}{x^{r+1}} & pour \quad x > \lambda \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

r et λ étant deux paramètres strictement positifs.
1) Vérifier que f est une densité de probabilité.
2) Calculer la fonction de répartition dans le cas où $r = \lambda = 2$.
3) Calculer $E(X^k)$ dans le cas général. Cette quantité existe-t-elle toujours ?
4) En déduire l'espérance mathématique et la variance de X .

Exercice 3

On considère 2 variables aléatoires indépendantes X et Y, de même loi, dont la densité est la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

1) Déterminer $F_{X^2}(x) = P([X^2 < x])$ en fonction de $F_X(\sqrt{x}) = P([X < \sqrt{x}])$. En déduire la densité de X^2.
2) Déterminer la densité de la variable aléatoire $Z = X + Y$.
3) Déterminer la densité du couple (X, Y) En déduire la probabilité $P(X < 2Y)$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle les identités

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \ , \ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Une urne contient r , $r > 1$ boules numérotées par $M = \{1, 2, \cdots, r\}$, on y prélève au hasard, successivement et sans remise 2 boules.
Soient X_1 , X_2 les variables aléatoires égales aux numéros des boules extraites de l'urne au premier et au second tirage.
1) a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) c'est à dire les probabilités $P([X_1 = k_1, X_2 = k_2])$. Déterminer les lois marginales de X_1 et X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?
b) Calculer $E(X_1)$, $E(X_2)$, , $\mathrm{Var}(X_1)$, $\mathrm{Var}(X_2)$.
c) Pour $k \in M$, $k > 1$ calculer $P([X_1 = k] \cap [X_2 < k]$ et $P([X_1 < k] \cap [X_2 = k])$.
On considère maintenant la variable aléatoire U , $U(\omega) = \max\{X_1(\omega), X_2(\omega)\}$ et la variable aléatoire V définie par
$V(\omega) = 1$ si $X_1(\omega) > X_2(\omega)$, $V(\omega) = 2$ si $X_1(\omega) < X_2(\omega)$.
3) a) Déterminer la loi du couple (U, V).
b) Déterminer la loi de U et la loi de V. Ces variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et on considère le couple de variables aléatoires continues (X, Y) dont la densité est uniforme dans le disque D de centre O et de rayon R.

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{\pi R^2} \chi_D(x, y)$$

où χ_D est la fonction qui prend la valeur 1 dans D et 0 à l'extérieur de D.
1) On note $M(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$, $r(\omega) = OM(\omega) = \sqrt{X^2(\omega) + Y^2(\omega)}$ et $\theta(\omega)$ est la mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{OM})$ prise entre 0 et 2π.
Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire r, c'est à dire calculer $F_r(x) = P([r < x])$.
2) Déterminer $F_{r,\theta}(x, y) = P([r < x] \cap [\theta < y])$ fonction de répartition conjointe du couple (r, θ).
En déduire les densités de r et θ. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Exercice 6

Trois usines A, B, C fournissent respectivement 20 pour cent ,30 pour cent et 50 pour cent des pièces détachées à une entreprise. 5 pour cent des pièces fournies par A sont défectueuses de même que 3 pour cent de celles fournies par B et 2 pour cent de celles fournies par C .Une pièce choisie au hasard est défectueuse quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine A ?

Exercice 7

une urne contient 4 boules blanches , 3 boules noires et 3 boules rouges . On tire simultanément trois boules de l'urne déterminer les probabilités des évènements suivants
1) A = " Les trois boules tirées sont blanches "
2) B = " On tire deux boules noires et une boule rouge "

3) C = " On tire au moins une boule blanche "
4) D = " On tire une boule de chaque couleur "

Exercice 8

Un étudiant estime avoir 2,5 chances sur 100 d'arriver en retard au cours chaque matin. Ce retard est imputable à un grand nombre de facteurs (réveil-matin, bus, embouteillages ...) et il l'attribue au hasard. on considère une période de 40 jours ouvrables numérotés de 1 à 40.
1) On appelle X le numéro du premier jour de retard. Quelle est la loi suivie par X ? Quelle est la probabilité qu'il arrive en retard pour la première fois le dixième jour ?
2) On appelle Y le nombre de retards observables sur la période. Quelle est la loi suivie par Y ? Qelle est la probabilité qu'il arrive en retard une seule fois ?

Exercice 9

Un amphi comprend 200 élèves des écoles de Coetquidan. On demande à 30 d'entre-eux, choisis au hasard, leur avis sur une nouvelle loi concernant la réforme des écoles. Quelle la probabilité que, sur les 30, on observe 10 réponses favorables, sachant que dans l'ensemble 48 pour cent sont favorables
Remarque : on pourra appeler X le nombre de réponses favorables parmi les 30 élèves choisis (ici X = 10) et déterminer la loi suivie par X.

Exercice 10

Une usine désire fabriquer des pièces de longueurs l avec $12 < l < 18$. Pour cela on dispose d'une machine qui règlée en m, avec $10 < m < 20$, coupe les pièces de façon que la longueur soit une variable aléatoire L de densité f_m définie par

$$f_m(t) = \begin{cases} k_m(m+1-t)(t-(m-1)) & \text{si} \quad t \in [m-1, m+1] \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [m-1, m+1] \end{cases}$$

où $k_m \in I\!R$. On notera F_m la fonction de répartition de L.
1) Déterminer k_m pour que f_m soit une densité de probabilité.
2) La machine étant règlée en m, déterminer la probabilité qu'une pièce ait une longueur supérieure à $m - 0,5$. 3) La machine étant règlée en m, déterminer la probabilité qu'une pièce ait une longueur inférieure à $m + 0,5$ sachant que la longueur est supérieure à $m - 0,5$. 4) Une pièce est acceptée si sa longueur est comprise entre $l - 0,5$ et $l + 0,5$, elle est perdue si sa longueur est inférieure à $l - 0,5$, ce qui engendre une perte de 10F, si elle est de taille supérieure à $l + 0,5$ on peut la retailler, ce qui engendre une perte de 3F. On appelle X la variable aléatoire égale à la perte subie (0 si elle est acceptée). Déterminer la loi de X en fonction de $F_m(l-0,5)$ et de $F_m(l+0,5)$. 5) Déterminer le règlage m à adopter pour que l'espérance de X soit minimum.

Exercice 11

Etant donné un réel $a > 0$ soit la fonction f_a définie par

$$f_a(x) = \frac{\lambda_a}{a^2 + x^2}$$

1) Déterminer λ_a pour que f_a soit la densité d'une variable aléatoire X_a.
2) Montrer que la fonction caractéristique de la variable aléatoire X_a est $\phi_X(t) = e^{-a|t|}$.
3) Les réels a et b étant strictement positifs on appelle X_a et X_b deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_a et f_b. Déterminer les fonctions caractéristiques des variables aléatoires $Y = X_a + X_b$ et $Z = X_a - X_b$. En déduire les densités de Yet$Z$.

Exercice 12

Une urne contient un tiers de boules blanches et deux tiers de boules noires. On tire une boule, si elle est blanche le jeu est terminé, si elle est noire on la remet dans l'urne et on procède à un nouveau tirage. On répète cette opération jusqu'à l'obtention d'une boule blanche. On appelle X le nombre de tirages à effectuer pour voir le jeu se terminer.
1) Déterminer la loi de X et calculer l'espérance mathématique de X .
2) Le gain Y est de 30 F si la boule blanche sort au premier ou au deuxième coup, 20 F si elle sort au troisième, 10 F si elle sort au quatrième et 5 F ensuite. Déterminer la distribution de probabilité de Y. Sachant qu'il faut payer 10 F pour procéder à un tirage écrire le bilan global Z en fonction de X et Y. Le jeu est-il équitable ? (c'est à dire a t-on E(Z) = 0 ?)

Exercice 13

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y, de même loi dont la densité est la fonction $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \chi_{]0,+\infty[}(x)$, $\lambda > 0$
1) Déterminer $F_{X^2}(x) = P([X^2 < x])$ en fonction de
$F_X(\sqrt{x}) = P([X < \sqrt{x}])$. En déduire la densité de X^2.
Remarque : La variable aléatoire X prend des valeurs positives.
2) On définit $Z = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$.Montrer que $F_T(x) = F_X(x) + F_Y(x) - F_X(x)F_Y(x)$ et que $F_Z(x) = F_X(x)F_Y(x)$
(Remarque : $F_X = F_Y$). En déduire les densités de Z et de T.
3) On note $D = \{(z, t) \in I\!R^2 | z > 0, t > 0 \ , \ z \geq t\}$. Montrer que la densité du couple (Z, T) est donnée par $g(z, t) = 2f_{(X,Y)}(z, t)\chi_D(z, t)$ où $f_{(X,Y)}$ est la densité conjointe du couple (X, Y) (remarquer que si $C = [a, b] \times [c, d] \in D$ on a

$$P((Z, T) \in C) = \int\int_C 2f_{(Z,T)}(z, t)dzdt)$$

Retrouver les densités de Z et de T .

Exercice 14

On dispose de 7 dés à 6 faces. On numérote ces dés de 1 à 7 de telle sorte que le dé numéro i a $i-1$ faces noires et $7-i$ faces blanches.
On se propose dans un premier temps de choisir un de ces dés. A cette fin on lance un huitième dé et on regarde le résultat :
- Si ce résultat est i $(2 \leq i \leq 6)$ on choisit le dé numéro i.
- Si ce résultat est 1 on lance une deuxième fois le dé.
Le dé choisi sera alors le dé numéro 1 si le second résultat est 1, 2 ou 3 et le dé numéro 7 si le second résultat est 4, 5 ou 6.
Pour $1 \leq i \leq 7$, on note D_i l'évènement "*le dé* n^0 i *est choisi* " et A l'évènement " *le premier jet du huitième dé a donné 1* ".
1)
a) Quelle est la valeur de $P(D_i)$ pour $2 \leq i \leq 6$.
b) Quelle est la valeur de $P(D_i|A)$ pour $i=1$ et $i=7$. En déduire $P(D_1)$ et $P(D_7)$.
Après avoir sélectionné un dé on le lance plusieurs fois et on s'intéresse aux évenements :
N_k : "*On a obtenu une face noire au k-ième lancer du dé sélectionné* " $(k \geq 1)$.
$S_n = \cap_{k=1}^{n} N_k$, $n \geq 1$.
On admettra que

$$P(S_n|D_i) = \prod_{k=1}^{n} P(N_k|D_i) \ , n \geq 1 \text{ et } 1 \leq i \leq 7$$

2) a) Que vaut $P(N_k|D_i)$?
b) Montrer que $P(N_k) = 1/2$.
3) a) Calculer $P(S_2)$. Les évènements N_1 et N_2 sont-ils indépendants ?
b) Calculer $P(N_2|N_1)$.

Exercice 15

On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité. On appelle X une variable aléatoire dont la loi de probabilité admet f comme densité.
2) Déterminer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire $Y = X^2$ en fonction de la fonction de répartition de X. En déduire la densité de la variable aléatoire Y.
3) Calculer l'espérance mathématique de X ainsi que sa variance.

Exercice 16

Un gardien de nuit doit ouvrir une des portes à contrôler durant sa tournée, dans le noir. Il possède 10 clés d'allure semblable, mais une seule peut ouvrir la porte en question. Le gardien dispose de deux méthodes.

— Méthode A : Il pose les 10 clés devant lui et les essaye l'une après l'autre dans l'ordre dans lequel elles se présentent
— Méthode B : il essaye une clé après avoir agité le trousseau, en recommençant cette opération jusqu'à ce qu'il trouve la bonne clé .

On appelle X_A (resp. X_B) la variable aléatoire qui désigne le nombre de clés essayées (y compris celle qui donne satisfaction) par la méthode A (resp. B).
1) Montrer que X_A suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Quelle est la loi suivie par X_B ?
2) Quelle est la probabilité d'essayer plus de huit clés par la méthode A ? Par la méthode B ? On notera H l'évenement " essayer plus de huit clés ".
Le gardien utilise la méthode A deux fois sur trois, quelle est la probabilité conditionnelle que le gardien utilise la méthode B sachant que les huit premiers essais ont échoués ?

Exercice 17

On définit

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{lll} k\,(1 + xy(x^2 - y^2)) & \text{si} & -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} & \end{array} \right.$$

1) Déterminer la valeur de k pour que f soit une densité de probabilité associée à un couple (X, Y) de variables aléatoires.
2) Déterminer les densités marginales de X et Y ainsi que leurs fonctions caractéristiques.
3) Déterminer la fonction caractéristique de la variable $X+Y$. Conclusion ? Pour le calcul de cette fonction caractéristique on pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant où ϕ_U est la fonction caractéristique de U.

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_{(X,Y)}(t,t).$$

Exercice 18

1) a) Une urne contient une proportion p de boules blanches et q de boules noires ($p+q = 1$). On répète des tirages avec remise d'une boule dans l'urne. On appelle X le nombre de répétitions nécéssaires pour obtenir la première boule blanche . Quel type de loi suit X ?
b) Déterminer la fonction génératrice $G_X(t)$ de X. En déduire la fonction génératrice de $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes de même loi que X .
2) On appelle Y_r le nombre de répétitions nécéssaires pour obtenir <u>exactement</u> r boules blanches. Montrer que

$$P([Y_r = n]) = C_{n-1}^{r-1} p^r q^{n-r}$$

La loi suivie par Y_r est appelée loi binomiale négative.
3) Montrer que

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{1}{(1-x)} = \sum_{i=0}^{\infty} C_{n-1+i}^{i} x^i$$

En déduire la fonction génératrice $G_{Y_r}(t)$ de Y_r . Quelle type de loi suit la variable aléatoire S_n introduite dans la question précédente ?

Table des matières