Représentations linéaires des groupes finis

Joseph Mellac

29 mars 2018

1 Généralités

1.1 Définitions, exemples

On considère un groupe fini G, un corps $\mathbb{K}$ et un $\mathbb{K}$ espace vectoriel V de dimension finie. On note $GL(V)$ l'ensemble des automorphismes linéaires de V.

Définition. Une représentation linéaire de G dans V (sur $\mathbb{K}$) est un couple (V, ρ) où $\rho : G \to GL(V)$ est un morphisme de groupes. Le morphisme ρ est en général omis et on dira que V est une représentation linéaire de G.
La dimension de V est appelé degré de la représentation linéaire. On dit que la représentation est fidèle si ρ est injectif.

Exemples . 1) La représentation définie par $\forall g \in G,\ \rho(g) = Id_V$ est appelée représentation triviale.

2) Quand G est un sous groupe de $GL(V)$, G agit de manière naturelle sur V, $(\rho(g)v = g(v))$, on dit que (V, ρ) est une représentation standard ou naturelle.
3) Représentations de permutation. Soient G un groupe fini, agissant à gauche sur un ensemble fini X. On prend $V = \mathbb{K}^X$, $\mathbb{K}$ espace vectoriel des applications de X vers $\mathbb{K}$.
En définissant $e_x \in V$ par $e_x = \delta_x$ (symbole de kronecker), la famille $\{e_x, \mid x \in X\}$ est une base de V. On définit ρ par :
$\rho(g)f(x) = f\left(g^{-1}x\right),\ f \in \mathbb{K}^X,\ g \in G$, On a bien $\rho(g) \in GL(V)$, avec $(\rho(g))^{-1} = \rho\left(g^{-1}\right)$ on a alors $\rho(g)(e_x) = e_{gx}$. Si $f = \sum_{x\in X} \lambda_x e_x,\ ,\ \lambda_x \in \mathbb{K},\ \rho(g)f = \sum_{x\in X} \lambda_x e_{gx} = \sum_{x\in X} \lambda_{g^{-1}x} e_x$. Le degré de ρ est le cardinal de X.

Remarque. Dans le cas où V est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel hermitien, on dit que la représentation est unitaire si l'image de ρ est incluse dans le groupe unitaire de V.

Si la représentation n'est pas unitaire pour le produit scalaire $(.|.)$, elle l'est pour le produit scalaire défini ci-dessous :

$$< v|w >= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} (\rho(g)v|\rho(g)w).$$

Dans l'exemple précédent, si $K = \mathbb{C}$, on peut définir un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^X$ par $(f|g) = \sum_{x \in X} f(x)\overline{g(x)}$. la base $\{e_x, \mid x \in X\}$ est alors orthonormale et la représentation est unitaire.

4) Représentations régulières Dans l'exemple précédent, si $X = G$, muni de l'opération de translation à gauche, la représentation est appelée représentation régulière (à gauche) de G. Elle est donc définie par : $\rho(g)\left(\sum_{h \in G} \lambda_h e_h\right) = \sum_{h \in G} \lambda_h e_{gh}$.

5) Représentation duale ou contragrédiente. Soient (V, ρ) une représentation de G et V son dual. On définit une représentation sur V^* en posant pour toute forme linéaire $f \in V^*$ et pour tout $g \in G$, $\rho^*(g)(f) = f \circ \rho(g^{-1})$, ρ^* est une représentation de V^* appelée représentation duale ou contragrédiente de ρ.

Définition. Soient (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) deux représentations linéaires de G. Un morphisme de (V_1, ρ_1) vers (V_2, ρ_2) est une application linéaire $f : V_1 \longrightarrow V_2$ vérifiant :
$\forall g \in g,\ f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$, on parle aussi de G-morphisme ou d'application linéaire G-équivariante.
Si f est un isomorphisme, on dit que les représentations sont équivalentes.

Exemples . 1) Soient X et Y deux ensembles sur lesquels le groupe G agit à gauche et $f : X \longrightarrow Y$ une application G-équivariante : $\forall (g, x) \in G \times X,\ \ f(g.x) = g.f(x)$. f se prolonge en un G-morphisme $f : \mathbb{K}^X \longrightarrow \mathbb{K}^Y$.

2) Soit $G =< a >$ groupe cyclique d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$, $V = K^n$, en identifiant $GL_n(K)$ et $GL(K^n)$ une représentation $\rho : G \longrightarrow GL_n(K)$ est donnée par $\rho(a_i) = A^i$ où $A \in GL_n(K)$ vérifie $A^m = I_n$. Deux représentations correspondant aux matrices A et A' sont équivalentes si et seulement si ces deux matrices sont semblables.

3) soient (V, ρ) et (W, σ) deux représentations de G. On définit une représentation de $Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ par $\pi(g)(\phi) = \sigma(g) \circ \phi \circ \rho(g^{-1})$. Un application linéaire ϕ qui est fixe sous cette action de G est simplement un G-morphisme.

1.2 Sous représentations, représentations irréductibles

Définition. Soit $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ une représentation d'un groupe fini G dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V. Un sous espace vectoriel W de V est stable ou invariant par ρ si $\forall g \in G, \rho(g)(W) \subset W$, l'homorphisme $G \to GL(W)$, $g \mapsto \rho(g)|_W$ est une sous représentation de ρ, on dit aussi que W est une sous représentation de ρ.

Remarque. Les sous espaces $\{0\}$ et V sont invariants, ce sont les sous espaces invariants triviaux.

Exemple. On considère la représentation de permutation de l'exemple 3 du paragraphe 1.1. Le sous espace V_c des fonctions constantes est invariant par ρ, c'est une sous représentation de degré 1.
Le sous espace V_0 des fonctions f de X dans K vérifiant : $\sum_{x \in X} f(x) = 0$ est aussi invariant par ρ, c'est une sous représentation de degré $Card(X) - 1$.

Remarque. 1) Soit W un sous espace vectoriel de V stable par ρ, il est possible de définir une représentation linéaire sur l'espace quotient V/W par $\overline{\rho}(g)(v+W) = \rho(g)v + W$.

2) Si $f : V_1 \longrightarrow V_2$ est un G-morphisme, $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous espaces G-invariants et $V_1/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f$ au sens de G-isomorphisme.

Définition. Une représentation (ρ, V) est irréductible si elle n'admet pas de sous représentation propre (c'est à dire distincte de $\{0\}$ et de V).

Exemples . 1) Si G est abélien fini, une représentation irréductible sur $\mathbb{C}$ est de dimension 1. Soit $m = Card(G)$ le polynôme minimal de $\rho(g), g \in G$, divise $X^m - 1$. La famille des $\rho(g), g \in G$ est donc une famille d'endomorphismes diagonalisables, commutant deux à deux, il existe donc une base de vecteurs propres pour tous les $\rho(g)$ .Chaque vecteur propre engendre une droite vectorielle stable sous G.

2) On prend $K = \mathbb{C}$. Le groupe dièdral D_n est défini par la rotation R et la symétrie axiale S vérifiant :
$R^n = S^2 = Id,\ SR = SR^{n-1}$. Notons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et pour $j \in [\![0, n-1]\!]$ on définit
$\rho_j(R) = \begin{pmatrix} \omega^j & 0 \\ 0 & \omega^{-j} \end{pmatrix}$, $\rho_j(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est une représentation linéaire irréductible de degré 2 si de D_n si $j \neq 0$. En remarquant que $\rho_j(S)\rho_j(R)\rho_j(S) = \rho_{n-j}(R)$, on remarque que les représentations ρ_j et ρ_{n-j} sont équivalentes, car $\rho_j(S) = A \in GL_2(\mathbb{C})$ est indépendant de j, ce qui entraine qu'il y a $\dfrac{n}{2} - 1$ si n pair et $\dfrac{n-1}{2}$ si n impair représentations irréductibles car ρ_0 n'est pas irréductible.

3) Une représentation de permutation de degré > 1 n'est jamais irréductible comme on l'a vu dans un exemple précédent. Par contre les sous espaces invariants notés V_c et V_0 précédemment sont irréductibles.

4) Soit G un p-groupe fini et K un corps de caractéristique p. Soit $v \in V$, on appelle W le $\mathbb{F}_p$ espace vectoriel engendré par les vecteurs $\rho(g)v,\ g \in G$.
C'est une $\mathbb{F}_p$ représentation linéaire, le nombre d'éléments de W est p^m pour un certain m. L'action de G sur W permet à l'aide de la formule des classes de montrer que le nombre de vecteurs fixes est divisible par p, il y a au moins un vecteur fixe, le vecteur nul, ce qui montre qu'il existe des vecteurs fixes non nuls. La seule représentation irréductible est donc (à isomorphisme près) la représentation triviale.

5) Soient $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos. Les représentations irréductibles de G sont toutes de dimension 1 de la forme :
$\rho_\zeta : k \longmapsto \zeta^k \in GL_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^*$, ζ étant une racine p-ième de l'unité. Si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est différente de p, il y a p représentations irréductibles, si la caractéristique vaut p, il y en a une seule, la triviale car 1 est alors la seule racine p-ième de l'unité.

Proposition. (lemme de Schur). Soient V et W deux représentations irréductibles (de degré ≥ 1) du groupe G et $\phi : V \longrightarrow W$ un G-morphisme.
1) $\phi = 0$ ou ϕ est un isomorphisme.
2) Si on a de plus $V = W$ et $\mathbb{K}$ algébriquement clos, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\phi = \lambda Id_V$.

Démonstration. 1) Le noyau et l'image de ϕ sont des sous espaces invariants de V. Etant irréductibles, si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ (resp. $\operatorname{Ker} f = V$) on a $\operatorname{Im} f = V$ (resp. $\operatorname{Im} f = \{0\}$.
2) Le corps $\mathbb{K}$ étant algébriquement clos, ϕ admet au moins une valeur propre λ, il suffit d'appliquer la première partie à $\phi - \lambda \, Id_V$.

Définition. La somme directe de deux repésentations (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) du groupe g est définie par :
$\rho_1 \oplus \rho_2 : G \longrightarrow GL(V_1 \oplus V_2), \ (\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1, v_2) = (\rho_1(g)v_1, \rho_2(g)v_2)$.

Définition. Une représentation (V, ρ) du groupe G est indécomposable si elle n'est pas somme directe de deux sous représentations propres, sinon elle est dite décomposable.

Remarque. Une représentation indécomposable n'est pas nécessairement irréductible comme le montre l'exemple qui suit.

Considérons la représentation régulière $\mathbb{K}^G$ d'un p-groupe fini G, $\mathbb{K}$ étant un corps de caractéristique p. Elle est indécomposable, mais pas irréductible.

Démonstration. On a vu précédemment qu'elle n'était pas irréductible, le vecteur $v_0 = \sum_{g \in G} e_g$ est un vecteur fixe. Appelons v un autre vecteur fixe, $v = \sum_{g \in G} \lambda_g e_g$. On a $\forall h \in G, \ \rho(h)v = v$ si et seulement si $\forall g \in G, \ \lambda_g = \lambda_{hg}$ en particulier pour tout $h \in G$, $\lambda_h = \lambda_e$ ce qui entraine $v = \lambda_e v$. Deux sous-représentation non nulles auront toujours une intersection non nulle et ne pourront pas être en somme directe. Ce résultat provient du fait que la caractéristique du corps $\mathbb{K}$ divise l'ordre du groupe G.

Proposition. (Théorème de Maschke) Soit G un groupe fini et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique ne divisant pas $|G|$. Soit V une représentation de G et W une sous représentation non nulle. Il existe une sous représentation W' de W telle que $V = W \oplus W'$.

Démonstration. Soit $p : V \longrightarrow V$ un projecteur d'image W, si $W_2 = \operatorname{Ker} p$ est invariant c'est terminé sinon on considère : $q = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g^{-1})$, c'est un autre projecteur de V sur W, mais cette fois il est invariant sous G. en appelant $W' = \operatorname{Ker} q$ on a le résultat énoncé car W' est stable sous G.

Corollaire. Soit G un groupe fini et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique ne divisant pas $Card(G)$.
1) Toute repésentation indécomposable est irréductible.
2) toute représentation ρ se décompose en une somme directe de représentations irréductibles : $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$.

Le résultat s'obtient par une récurrrence sur la dimension de V.

Remarque. En regroupant les représentations irréductibles isomorphes entre elles dans le corollaire précédent on obtient :
$\rho = \rho_1^{a_1} \oplus \cdots \oplus \rho_l^{a_l}$ où a_i est un entier non nul et $\rho_i^{a_i} = \rho_i \oplus \cdots \oplus \rho_i$ somme directe de a_i copies de ρ_i.
Si $\rho = (\rho')_1^{a'_1} \oplus \cdots \oplus (\rho')_{l'}^{a_{l'}}$ on a $l' = l$ et il existe une permutation $\sigma \in \Sigma_l$ telle que $\rho_i \simeq \rho'_{\sigma(i)}$ et $a_i = a'_{\sigma_i}$ pour $i \in [\![1, l]\!]$. Cette décomposition est appelée décomposition isotypique.

1.3 Produits tensoriels

Soient M et N deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$.

Proposition. Il existe un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, unique à un isomorphisme près, noté $T = M \otimes_{\mathbb{K}} N$, muni d'une application bilinéaire $\theta : M \times N \longrightarrow T = M \otimes_{\mathbb{K}} N$ qui vérifie la propriété universelle suivante : Etant donné P, $\mathbb{K}$-espace vectoriel, pour toute application bilinéaire $f : M \times N \longrightarrow P$, il existe une unique application linéaire $g : T \longrightarrow P$ telle que $f = g \circ \theta$.

Démonstration. Unicité
Si le couple (T', θ') vérifie cette propriété, en remplaçant (P, f) par (T', θ') il existe un unique j, $j : T \longrightarrow T'$ telle que $\theta' = j \circ \theta$ et en échangeant les rôles de T et T' il existe un unique j', $j' : T' \longrightarrow T$ vérifiant $\theta = j' \circ \theta'$. On doit avoir $j \circ j' = Id_{T'}$ et $j' \circ j = Id_T$ ainsi j est un isomorphisme.
Existence
On note C le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{(M \times N)}$. Les éléments de C sont les combinaisons linéaires de la forme $\displaystyle\sum_I a_i.(x_i, y_i)$ où I est finie et $a_i \in \mathbb{K}, i \in I$. On appelle D le sous espace vectoriel engendré par les éléments des types suivants :

$$(x + x', y) - (x, y) - (x', y),\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y'),\ (ax, y) - a.(x, y),\ (x, ay) - a.(x, y).$$

On définit $T = C/D$. On note $x \otimes y$ l'image de (x, y) dans T par la projection canonique. L'application $\theta : M \times N \longrightarrow T,\ (x, y) \longmapsto x \otimes y$ est bilinéaire. T est noté $M \otimes_{\mathbb{K}} N$.

Si $f : M \times N \longrightarrow P$ est bilinéaire, il suffit de définir g par $g(x \otimes y) = f(x, y)$.

Proposition. Soient M et N deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimensions finies. $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_m)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ des bases respectivement de M et N.
$\mathcal{C} = (e_i \otimes f_j \mid (i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$ est une base de $M \otimes_{\mathbb{K}} N$, $\dim(M \otimes_{\mathbb{K}} N) = \dim(M) \dim(N)$.

Définition. Soient N et N deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, espaces respectifs de représentations ρ et σ. On définit une représentation notée $\rho \otimes \sigma$ sur $M \otimes_{\mathbb{K}} N$ par : $\forall (g, v, w) \in g \times M \times N,\ (\rho \otimes \sigma)(g)(v \otimes w) = \rho(g)(v) \otimes \sigma(g)(w)$. Cette représentation est appelée produit tensoriel des représentations ρ et σ.

Exemples . 1) Carrés symétriques et carrés extérieurs.
On considère (V,ρ) une représentation linéaire du groupe G. La représentation $(V\otimes V,\rho\otimes\rho)$ n'est pas irréductible.
Les tenseurs symétriques $x.y=\dfrac{1}{2}(x\otimes y+y\otimes x)$ et antisymétriques $x\wedge y=\dfrac{1}{2}(x\otimes y-y\otimes x)$ sont G-invariants, il en est de même des sous espaces vectoriels qu'ils engendrent, notés $\mathrm{S}^2(V)$ et $\Lambda^2(V)$. Si $\dim V=n$, $\dim\left(\mathrm{S}^2(V)\right)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ car une base est $e_i.ej,\ 1\leq i\leq j\leq n$ et $\dim\left(\Lambda^2(V)\right)=\dfrac{n(n-1)}{2}$, car une base est $e_i\wedge ej,\ 1\leq i<j\leq n$ de plus

$$V\otimes V=\mathrm{S}^2(V)\oplus\Lambda^2(V).$$

2) Soient V et W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, V^* le dual de V.L'application bilinéaire :

$$W\times V^*\to Hom_{\mathbb{K}}(V,W),\ (w,f)\mapsto\{\phi:v\mapsto\phi(v)=f(v)w\}$$

définit un homorphisme canonique :

$$u:W\otimes_{\mathbb{K}}V^*\longrightarrow Hom_{\mathbb{K}}(V,W).$$

C'est un morphisme injectif et les deux espaces étant de même dimension c'est un isomorphisme. Si V et W sont des représentations, en utilisant la représentation définie précédemment sur $Hom_{\mathbb{K}}(V,W)$ u est G-équivariant.

2 Théorie des caractères

A partir d'ici le corps de base est $\mathbb{C}$.

2.1 Définitions

Définition. Soit (ρ,V) une représentation d'un groupe fini G. Le caractère de la représentation ρ est une application $\chi_\rho:G\longrightarrow\mathbb{C}$ définie par $\chi_\rho(t)=\mathrm{Tr}\,(\rho(t))$, où Tr est la trace de l'automorphisme $\rho(t)$. Ce caractère sera noté simplement χ s'il n' y a pas d'ambiguité. Lorsque V est irréductible, on parlera de caractère irréductible.

Remarque. L'automorphisme $\rho(t)$ est diagonalisable, car son polynôme minimal est un diviseur de $X^{|G|}-1$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exemples . 1) Soit $V=K^X$ muni de la représentation de permutation et $(e_x)_{x\in X}$ la base canonique (Voir 1.1) . On a $\rho(g)(e_x)=e_{gx}$ en appelant ρ le caractère associé à cette représentation, on a $\chi(g)=|\{x\in X\mid g.x=x\}|$ nombre de points fixes de g dans X.

2) Considérons la représentation ρ_1 du groupe diédral (Voir 1.2) on a $\chi(S)=0$ et
$\chi(R^k)=2\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]$

Proposition. Soit χ le caractère de la représentation ρ de degré n. On a
1) $\chi(1) = n$.
2) $\forall t \in G,\ \chi(t^{-1}) = \overline{\chi(t)}$.
3) $\forall s, t \in G,\ \chi(tst^{-1}) = \chi(s)$.

Démonstration. Le 2 vient du fait que les valeurs propres $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ de $\rho(t)$ sont de modules 1 et que $\chi(t^{-1}) = \dfrac{1}{\lambda_1} + \cdots + \dfrac{1}{\lambda_n}$.
le 3 vient de la propriété : $\mathrm{Tr}(g \circ f) = \mathrm{Tr}(f \circ g)$ pour des endomorphismes quelconques de V.

Définition. Fonction centrale. Une fonction $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ constante sur les classes de conjugaison ($\forall s, t \in G,\ f(tst^{-1}) = f(s)$) est appelée fonction centrale. C'est le cas d'un caractère.

Proposition. Soient $(\rho_i, V_i),\ i = 1, 2$ deux représentations de G et $\chi_i,\ i = 1, 2$ leurs caractères respectifs :
1) Le caractère χ de la représentation somme directe $V_1 \oplus V_2$ est égal à $\chi_1 + \chi_2$.
2) Le caractère ψ de la représentation produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$ est égal à $\chi_1.\chi_2$.
3) Le caractère de la contragrédiente V_1^* est donnée par $\chi_{V_1^*}(g) = \overline{\chi_{V_1}(g)}$.
4) Le caractère de $H = Hom(V_1, V_2)$ est donné par $\chi_H(g) = \chi_{V_2}(g)\chi_{V_1}(g^{-1})$.

Démonstration. 1) En considérant les formes matricielles de $\rho_i(s)$, $R_s^i,\ i = 1, 2$, la représentation $V_1 \oplus V_2$ est donnée par $R_s = \begin{pmatrix} R_s^1 & 0 \\ 0 & R_s^2 \end{pmatrix}$ d'où $\mathrm{Tr}(R_s) = \mathrm{Tr}(R_s^1) + \mathrm{Tr}(R_s^2)$.

2) On a de même $\psi(s) = \displaystyle\sum_{i_1, i_2} r_{i_1 i_1}(s).r_{i_2 i_2}(s) = \chi_1(s).\chi_2(s)$.

Notations de 1.3

Proposition. Soit (ρ, V) une représentation de G et χ son caractère. On note χ_σ le caractère du carré symétrique $\mathrm{S}^2(V)$ et χ_α celui de $\Lambda^2(V)$. Pour tout $t \in G$ on a :

$$\chi_\sigma(t) = \frac{1}{2}\left((\chi(t))^2 + \chi(t^2)\right)$$

$$\chi_\alpha(t) = \frac{1}{2}\left((\chi(t))^2 - \chi(t^2)\right).$$

et $\chi_\sigma + \chi_\alpha = \chi^2$.

Démonstration. Avec les notations précédentes, en se plaçant dans une base de vecteurs propres on a $\rho(t)(e_i) = \lambda_i e_i$ soit $\chi(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\chi(t^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.
On note f_{ij} (respectivement g_{ij}) l'élément $e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i, 1 \leq i \leq j \leq n$
(respectivement $e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i, 1 \leq i < j \leq n$).

$$\rho\otimes\rho(t)(f_{ij}) = \lambda_i\lambda_j f_{ij},\quad \rho\otimes\rho(t)(g_{ij}) = \lambda_i\lambda_j g_{ij}.$$

$$\chi_\sigma(t) = \sum_{i\leq j}\lambda_i\lambda_j = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 + \sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j = \frac{1}{2}\left((\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right).$$

$$\chi_\alpha(t) + \sum_{i\leq j}\lambda_i\lambda_j = \frac{1}{2}\left((\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right).$$

Proposition. Soit G un groupe abélien fini et (ρ, V) une représentation irréductible de G, alors $\dim V = 1$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tout $g\in G$, $\rho(g)$ est un G-morphisme car G est commutatif. Le lemme de Schur entraine que $\rho(g) = \lambda_g Id_V, \lambda_g\in\mathbb{C}$. Si $W = \mathbb{C}.v,\ v\in V-\{0\}$, W est invariant ce qui entraine, la représentation étant irréductible, $W = V$.

L'étude des représentations irréductibles d'un groupe abélien se ramène donc à l'étude des morphismes de G dans $\mathbb{C}^*$, le caractère d'une représentation s'identifie donc à cette représentation. On note $\hat{G}$ l'ensemble de ces représentations, c'est un groupe abélien.

Proposition. Le groupe fini G étant abélien, on a $\hat{G}\simeq G$

Démonstration. On vérifie que si $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on a le résultat car $\hat{G} = \{\chi_1^k,\ \mid k\in[\![0, n-1]\!]\}$, la démonstration pour un groupe commutatif quelconque sera établie ultérieurement.

Proposition. Deux représentations isomorphes ont des caractères identiques.

Démonstration. Les matrices de $\rho_1(t)$ et de $\rho_2(t)$ sont semblables

2.2 Relations d'orthogonalité

On munit $\mathbb{C}^G$ (exemple 3 Partie 1.1) du produit scalaire défini dans cet exemple mais normé :

$$(f|g) = \frac{1}{|G|}\left(\sum_{t\in G} f(t)\overline{g(t)}\right).$$

Théorème. 1) si χ est un caractère d'une représentation irréductible on a $(\chi|\chi) = 1$.
2) Si χ et χ' sont deux caractères correspondant à des représentations irrréductibles non isomorphes on a $(\chi|\chi') = 0$.

Ceci traduit le fait que l'ensemble des caractères irréductibles forment une famille orthonormale de $(\mathbb{C}^G, (.|.))$.

On peut en déduire que le nombre de caractères irréductibles est fini, car ils forment une famille libre de $\mathbb{C}^G$ qui est de dimension $|G|$.

La démonstration repose sur les résultats suivants : Etant données deux représentations de degrés respectifs n et n', on considère leurs matrices dans une base : $M(\rho(g)) = (a_{ij}(g))_{1\leq i,j\leq n}$ $M(\rho'(g)) = (b_{ij}(g))_{1\leq i,j\leq n'}$

Pour $f, g \in \mathbb{C}^G$ on définit $< f, g >= \frac{1}{|G|}\left(\sum_{t\in G} f(t)g(t^{-1})\right)$

Lemme. 1) Si ρ et ρ' ne sont pas équivalentes, $\forall i, j, l, m,\ < a_{il}, b_{mj} >= 0$.
2) $< a_{il}, a_{mj} >= \frac{1}{n}\delta_{ij}\,\delta_{lm}$.
3 Si f et g prennent leurs valeurs dans $\mathbb{U}$, ensemble des nombres complexes de module 1, on a $< f, g >= (f|g)$.

La démonstration repose sur le lemme de Schur appliqué à $T^0 = \frac{1}{|G|}\left(\sum_{t\in G}\rho(t)T(\rho'(t))^{-1}\right)$ (resp à $T^0 = \frac{1}{|G|}\left(\sum_{t\in G}\rho(t)T(\rho(t))^{-1}\right)$) où $T : V \to V'$ (resp $T : V \to V$) est une application linéaire, dans les deux cas T^0 est un G-morphisme.

Démonstration. du Théorème.
1) $(\chi|\chi) =< \chi, \chi >=< \sum_i a_{ii}, \sum_j a_{jj} >= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = 1$.
2) $(\chi|\chi') =< \chi, \chi' >=< \sum_i a_{ii}, \sum_j b_{jj} >= 0$.

On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions centrales de $\mathbb{C}^G$, c'est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^G$. la dimension de ce sous espace est égal au nombre de classes de conjugaison de G.

Théorème. Les caractères irréductibles de G forment une base orthonomale de $\mathcal{H}$.

Démonstration. On commence par montrer que si f est une fonction centrale, et $\rho_f = \sum_{t\in G} f(t)\rho(t) \in End(V)$ on a $\rho_f = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi})Id_V$ où n est le degré de la représentation V et ρ irréductible. Ce résultat est obtenu en remarquant que ρ_f est un G-morphisme, le lemme de Schur entraine que $\rho_f = \lambda Id_V$, λ est alors obtenu en calculant $\mathrm{Tr}(\rho_f)$.
Soit $f \in \mathcal{H}$ telle que $(f|\chi) = 0$ pour tout caractère irréductible χ on montre que $f = 0$. Pour établir ceci on note que le théorème de Maschke établit qu'une représentation quelconque π est somme directe des représentations irréductibles ce qui permet d'établir que $\pi_f = 0$. en l'appliquant à la représentation réguliére de $\mathbb{C}^G$, on obtient $\sum_{t\in g} f(t)e_t = 0$, ce qui entraine $f = 0$.

Conséquence : Si $f \in \mathcal{H}$, $f = \sum_{i=1}^{h}(f|\chi_i)\chi_i$ où $\chi_1, \cdots, \chi_h$ sont les caractères irréductibles de G.

Théorème. Le nombre de représentations irréductibles de G, (à isomorphisme près) est égal au nombre de classes de conjugaison de G.

Démonstration. Soient $C_1, \cdots C_k$ ces classes. $f \in \mathcal{H}$ entraine que f est constant sur chacune de ces classes et prend une valeur quelconque. On a donc $\dim \mathcal{H} = k$ qui correspond au nombre des représentations irréductibles d'après le théorème précédent.

Proposition. Soit $s \in G$ et soit r_s le nombre d'éléments dans la classe de conjugaison de s. On appelle $\chi_1, \cdots, \chi_h$ les caractères irréductibles de G.
1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)\overline{\chi_i(s)} = \frac{|G|}{r_s}$.
2) Si s et $t \in G$ ne sont pas conjugués, $\displaystyle\sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)\overline{\chi_i(t)} = 0$.

Démonstration. On définit une fonction centrale par $f_t(t) = 1$ et $f_t(g) = 0$ si g et t ne sont pas conjugués. En écrivant $f_t = \displaystyle\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \chi_i$ le résultat est obtenu en calculant $(f_t|\chi_i)$ qui donne $\lambda_i = \dfrac{1}{|G|} r_t \overline{\chi_i(t)}$.

2.3 Décomposition d'une représentation

Théorème. Soit (ρ, V) une représentation du groupe G de caractère χ. Décomposant $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$ comme somme directe de représentations irréductibles, le nombre de W_i isomorphes à une représentation irréductible W_j fixée est $(\chi|\chi_j)$ où $\chi = \chi_V$.

Démonstration. On a $\chi = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \chi_i$ ce qui entraine $(\chi|\chi_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (\chi_i|\chi_j) =$ nombre de V_i isomorphes à V_j.

Corollaire. En utilisant les notations ci-dessus :
1) Le nombre de V_i isomorphes à une représentation irréductible V_j fixée est indépendant de la décomposition choisie.
2) Soient (ρ, V) et (ρ', V') deux représentations de caractères χ et χ' respectivement, alors : $V \simeq V' \iff \chi = \chi'$.

Ce corollaire montre que le nombre de caractères irréductibles est le même que celui des représentations irréductibles et que ce nombre est inférieur ou égal à $|G|$.

Corollaire. On a $V = V_1^{a_1} \oplus \cdots \oplus V_h^{a_h}$, où $\chi_1, \cdots, \chi_h$ les caractères irréductibles de G, les V_i, $i \in [\![1, h]\!]$ étant irréductibles et $a_i = (\chi_V, \chi_i)$. C'est la décomposition isotypique de V.

Théorème. Soit χ le caractère d'une représentation (ρ, V), $(\chi|\chi) \in \mathbb{N}^*$ et $(\chi|\chi) = 1$ si et seulement si χ est irréductible.

Démonstration. Pour démontrer ce résultat utiliser la décomposition isotypique.

Soit un groupe G. et $\chi_1, \cdots, \chi_h$ les caractères irréductibles de degrés respectifs $n_1, \cdots, n_h$. soit L la représentation régulière de G et m le caractère associé. Il est aisé de constater que $m(1) = |G|$ et $m(t) = 0$ si $t \neq 1$.

Théorème. Chaque représentation irréductible W_i de G est contenu dans la représentation régulière avec une multiplicité égale à $n_i = \dim W_i$, d'où $m = \sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i$.

On a montré que ce nombre est $(m|\chi_i) = \frac{1}{|G} m(1)\chi_i(1) = n_i$.

Corollaire. Les degrés vérifient :

1) $\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = |G|$.

2) Si $s \in G, s \neq 1$, $\sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(s) = 0$.

Démonstration. On a $m = \sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i$, ce qui entraine $m(1) = \sum_{i=1}^{h} n_i^2 = |G|$ et $m(s) = \sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(s) = 0$ si $s \neq 1$.

Ce résultat servira par la suite pour constuire des tables de caractères.

2.4 Tables de caractères

Si G est un groupe fini, le nombre de caractères est éal au nombre de classes de conjugaison. Une représentation V est déterminée par son caractère χ_V qui est une fonction centrale.

On peut regrouper l'information concernant les représentations de G dans un tableau appelé table des caractères.

Exemple

	k_1	$\cdots$	k_h
	g_1	$\cdots$	g_h
χ_1	$\chi_1(g_1)$	$\cdots$	$\chi_1(g_h)$
$\vdots$		$\vdots$	
χ_h	$\chi_h(g_1)$	$\cdots$	$\chi_h(g_h)$

où k_i est le nombre d'éléments de la classe de conjugaison de g_i

choisi dans une classe de conjugaison.

On utilisera les résultats suivants :
On appelle $D(G)$ le sous-groupe des commutateurs ou sous-groupe dérivé de G. On rappelle que $D(G)$ est le plus petit sous groupe tel que $G/D(G)$ est abélien.

On note $\hat{G}$ l'ensemble des représentations linéaires de degré 1 de G. On a $\hat{G} \simeq G/D(G)$, de plus les représentations de degré 1 de $G/D(G)$ se prolongent à G.

Certaines valeurs de ces tables pourront être calculées en utilisant des relations établies précédemment en particulier le dernier corollaire, l'orthogonalité des caractères et les relations de 2.2.

Groupes cycliques

Soit $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Les représentations sont de degré 1 et les caractères $\chi_1, \cdots \chi_n$ sont définis par : $\chi_r(s) = e^{\frac{2i\pi r}{n}s},\ o \leq s \leq n-1$.

Groupe de permutations S_3

Ce groupe admet trois classes ce conjugaison, celle de 1, des transpositions et des 3-cycles, donc trois caractères irréductibles de dgrés n_1, n_2et n_3 avec $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 6$. Le caractère trivial et la signature sont deux caractères de degré 1, le caractère χ_3 est donc de degré 2.

On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} n_i\chi_i(s) = 0$ si $s \neq 1$. d'où $\chi_3(1) = n_3 = 2,\ \chi_3((1,2)) = 0,\ \chi_3((1,2,3)) = -1$.

	1 $g_1 = 1$	3 $g_2 = (1,2)$	2 $g_3 = (1,2,3)$
χ_1	$n_1 = 1$	1	1
χ_2	$n_2 = 1$	-1	1
χ_3	$n_3 = 2$	0	-1

.

Groupe de permutations S_4

Il y a cinq classes de conjugaison : $(1), (1,2), (1,2,3), (1,2,3,4), (12)(34)$. Le caractère trivial et le caractère signature sont de degré 1. En faisant agir S_4 sur $\mathbb{C}^4$ par $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ on a $V = \mathbb{C}^4 = V_1 \oplus V_2$ où V_1 est la représentation triviale et $V_2 = \{\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i,\ |\ \sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 0\}$. On a $\chi_V = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$ or sur la classe de conjugaison K, $\chi_V(K)$ est le nombre d'éléments invariants dans la permutation, doù les valeurs prises par χ_V :
$(4,2,1,0,0)$, on en déduit les valeurs prises par χ_{V_2} : $(3,1,0,-1,-1)$, de plus $(\chi_{V_2}|\chi_{V_2}) = 1$ ce qui montre que le caractère est irréductible. La somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} n_i^2 = 24$ donne $n_4 = 3,\ n_5 = 2$. De plus $\chi_3.\chi_2$ est un caractère distincts des précédents et il est irréductible $\chi_4 = \chi_3.\chi_2$

	1 $g_1 = 1$	6 $g_2 = (1,2)$	8 $g_3 = (1,2,3)$	6 $g_4 = (1,2,3,4)$	3 $g_5 = (1,2)(3,4)$
χ_1	$n_1 = 1$	1	1	1	1
χ_2	$n_2 = 1$	-1	1	-1	1
χ_3	$n_3 = 3$	1	0	-1	-1
χ_4	$n_4 = 3$	-1	0	1	-1
χ_5	$n_5 = 2$	a	b	c	d

.

On en déduit $a = 0, b = -1, c = 0, d = 2$

Groupe des quaternions

$Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ on a $D(Q_8) = \{1-1\}$, $Q_8/D(Q_8) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il y a donc quatre représentation de degrés 1,il y a cinq classes de conjugaisons ,celle de 1 ,de -1 ,de i, de j et de k. $\sum_{i=1}^{5} n_i^2 = 8 \Rightarrow n_5 = 2$. Les valeurs prises par χ_5 sont obtenues en utilisant $(\chi_5|\chi_j) = 0,\ 1 \leq j \leq 4$. ce qui permet d'obtenir quatre équations à quatre inconnues.

	1	1	2	2	2
	$g_1 = 1$	$g_2 = -1$	$g_3 = i$	$g_4 = j$	$g_5 = k$
χ_1	$n_1 = 1$	1	1	1	1
χ_2	$n_2 = 1$	1	1	-1	-1
χ_3	$n_3 = 1$	1	-1	1	-1
χ_4	$n_4 = 1$	1	-1	-1	1
χ_5	$n_5 = 2$	-2	0	0	0

Groupe diédral D_4

$D_4 =< R, S | R^4 = Id,\ S^2 = Id,\ RS = SR^{-1} >$.

On a $D(D_4) = \{Id, R^2\}$ et $D_4/D(D_4) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il y a donc quatre représentations linéaires de degré 1 et une représentation de degré 2 obtenues comme dans l'exemple précédent. Les deux tables de caractères, de Q_8 et de D_4 sont identiques, bien que ces groupes ne soient pas isomorphes.

Sources :

Références

[1] Pierre de la Harpe. Représentations linéaires des groupes finis. http://www.unige.ch/math/folks/delaharpe/vulgarisation/3Repres16mar06.pdf.

[2] Nathan Jacobson. *Basic Algebra II. Second edition*. Dover publications Inc., 2009.

[3] Serge Lang. *Algebra Third edition*. Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

[4] Jean-Pierre Serre. *Représentation linéaires des groupes finis*. Hermann, 1971.

[5] Anupame Singh. Representation theory of finite groups. http://www.iiserpune.ac.in/~anupam/Rep-Theory.pdf.