Oral I - Agrégation interne Algèbre
Leçon 125
Isométries affines en dimension 3
formes réduites.

J. Mellac

Novembre 2015

Table des matières

Pour faciliter la lecture, les théorèmes sont suivis de leur démonstration. Le plan est constitué par les définitions, les théorèmes et les exemples. Il est possible de ne traiter qu'un des exemples 4.1 ou 4.2, qui peut également servir de développement.

1 Généralités

Prérequis : Espaces euclidiens, groupe orthogonal, groupe orthogonal du plan, espaces affines, applications affines.
Notations : L'espace affine euclidien de dimension 3 sera noté E et l'espace euclidien associé $\overrightarrow{E}$. On notera de même un sous espace affine par une lettre majuscule (exemple F) et le sous espace vectoriel associé par la même lettre surmontée d'une flèche (exemple $\overrightarrow{F}$).

1.1 Définition, premières propiétés

Définition. Une isométrie de E est une application de E vers E qui conserve la distance :
$\forall (A, B) \in E^2,\ ||\overrightarrow{f(A)f(B)}|| = ||\overrightarrow{AB}||$, où la distance d est définie par $d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}||$.

Proposition. Une application f de E vers E est une isométrie si et seulement si c'est une application affine et $\overrightarrow{f} \in O(\overrightarrow{E})$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que si f est une isométrie et si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM}$ on a $||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})|| = ||\overrightarrow{A'M'}|| = ||\overrightarrow{AM}|| = ||\overrightarrow{u}||$, avec $A' = f(A),\ M' = f(M)$. Ceci montre que $\overrightarrow{f} \in O(\overrightarrow{E})$ et f est une application affine bijective. La réciproque est immédiate.

Exemples . 1) Une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ est une isométrie et $\overrightarrow{t_{\overrightarrow{u}}} = Id_{\overrightarrow{E}}$.
2) Une symétrie, c'est à dire une application affine involutive s de E admettant au moins un point invariant, est une isométrie si et seulement si c'est une symétrie orthogonale, c'est à dire que
$\overrightarrow{E}_1 = \text{Ker}\left(\overrightarrow{s} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)$ et $\overrightarrow{E}_2 = \text{Ker}\left(\overrightarrow{s} + Id_{\overrightarrow{E}}\right)$ sont orthogonaux.

Démonstration. rappelons tout d'abord que s est une symétrie de E si et seulement si $\overrightarrow{s}$ est une involution linéaire. Il suffit de remarquer que si A est un point invariant de s et $M' = s(M),\ M'' = s(M')$, $\overrightarrow{s}^2(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM''} = \overrightarrow{AM} \Longleftrightarrow M'' = M \Longleftrightarrow s^2 = Id_E$.
On a $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_1 \oplus \overrightarrow{E}_2$, en effet, $\overrightarrow{E}_1 \cap \overrightarrow{E}_2 = \{\overrightarrow{0}\}$ et si
$\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E},\ \overrightarrow{u} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{u} + s(\overrightarrow{u})) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{u} - s(\overrightarrow{u})) = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2$ avec $\overrightarrow{u}_i \in \overrightarrow{E}_i,\ i = 1, 2$.
$\overrightarrow{s}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}_1 - \overrightarrow{u}_2$ et $||\overrightarrow{u}_1 - \overrightarrow{u}_2||^2 = ||\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2||^2 \Longleftrightarrow (\overrightarrow{u}_1|\overrightarrow{u}_2) = 0$ où $(.|.)$ représente le produit scalaire dans $\overrightarrow{E}$. s est donc une symétrie orthogonale si et seulement si $\overrightarrow{s}$ est donc une symétrie orthogonale si et seulement si $\overrightarrow{E}_1 \perp \overrightarrow{E}_2$, ce qui termine cette démonstration.

Théorème-définition. L'ensemble des isométries de l'espace est un groupe pour la loi de composition des applications, noté $Is(E)$, c'est un sous groupe du groupe affine de E. Si $f \in Is(E)$, $\det(\overrightarrow{f}) = \pm 1$. L'ensemble des isométries affines de E vérifiant $\det(\overrightarrow{f}) = 1$ est un sous groupe de $Is(E)$ appelé groupe des déplacements de l'espace, un élément f de $Is(E)$ vérifiant $\det(\overrightarrow{f}) = -1$ est appelé antidéplacement.

1.2 Forme réduite d'une isométrie

Théorème. Toute isométrie f de E peut se décomposer de façon unique sous la forme d'un produit commutatif $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ où $t_{\overrightarrow{u}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $g \in Is(E)$ a au moins un point fixe A. On a $Inv(g) = A + Inv(\overrightarrow{f}) = F$ (c'est un sous espace affine de E), $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}, \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$.

Démonstration. Première étape

Montrons que $\overrightarrow{E} = \operatorname{Ker}\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right) \oplus \operatorname{Im}\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)$.
Soit $\overrightarrow{x} \in \operatorname{Ker}\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)$, $\overrightarrow{y} \in \operatorname{Im}\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)$, $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$, $\exists \overrightarrow{z} \in \overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z}$.
$(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}) = (f(\overrightarrow{x})|f(\overrightarrow{z})) - (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{z}) = \overrightarrow{0}$.
Ces deux sous espaces vectoriels sont donc supplémentaires orthogonaux car
$\dim\left(\operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}})\right) + \dim\left(\operatorname{Im}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}})\right) = \dim(\overrightarrow{E})$ d'après le théorème du rang.

Deuxième étape

Soit $O \in E$, $O' = f(O)$. En utilisant l'étape précédente, il existe des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{x}$ tels que $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{u} + \left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)(\overrightarrow{x})$ avec $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$.
On définit le point A par $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{x}$ et on définit $g \in GA(E)$ par $g(A) = A$ et $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$, ce qui définit totalement g par :
$\forall M \in E, g(M) = A + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right)$ avec $M_1 = g(M)$.
Soient $A' = f(A)$, $M' = f(M)$, $M_1 = g(M)$ ce qui entraine $\overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{A'M'}$.
On a $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{u} + \left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)\left(\overrightarrow{AO}\right) + \overrightarrow{f}(OA) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{OA}$.
$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{u} \in \operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}})$, considérons la variété affine
$F = A + \operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}) = A + Inv(\overrightarrow{f}) = \left\{M \in E \mid \overrightarrow{AM} \in Inv(\overrightarrow{f})\right\}$.
Le point $M \in E$ est invariant pour g si et seulement si $\overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{AM}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \in \operatorname{Ker}\left(\overrightarrow{g} - Id_{\overrightarrow{E}}\right) = \operatorname{Ker}\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)$ si et seulement si $M \in F$, F est donc la variété affine ensemble des points invariants de g et $A \in F$.

Troisième étape

On a $t_{\overrightarrow{u}} \circ g\,(A) = t_{\overrightarrow{u}}\,(A) = A'$, et $g \circ t_{\overrightarrow{u}}\,(A) = g\,(A') = A'$ car $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{u} \in Inv(\overrightarrow{g})$ ce qui entraine $A' \in F$.
Soit $M \in E$, $M' = f(M)$.
$t_{\overrightarrow{u}} \circ g\,(M) = t_{\overrightarrow{u}} \circ g\,(A) + \overrightarrow{t_{\overrightarrow{u}} \circ g}\left(\overrightarrow{AM}\right) = A' + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right) = A' + \overrightarrow{A'M'} = M' = f(M)$.
On a de même $g \circ t_{\overrightarrow{u}}\,(M) = M'$ ce qui démontre que $t_{\overrightarrow{u}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{u}} = f$.

Unicité de la décomposition commutative

Si $f = t_{\overrightarrow{v}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{v}}$ où g est une isométrie admettant un point fixe A, en notant $A' = f(A)$, on a $A' = A + \overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u} \in \operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}) = Inv(\overrightarrow{f})$ d'après ce qui précède.
Si $M \in E$ a pour image M' par f, on a
$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right) \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)\left(\overrightarrow{AM}\right)$ soit $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} + \left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)\left(\overrightarrow{AM}\right)$, ce qui est une décomposition de $\overrightarrow{MM'}$ correspondant à la première étape. L'unicité de $\overrightarrow{u}$ est une conséquence de l'unicité de cette décomposition et l'unicité de g en résulte.

Remarques. 1) Si la commutativité n'est plus exigée dans la décomposition, il n'y a plus unicité. Il suffit de prendre pour un point quelconque A l'image $A' = f(A)$ de définir $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA'}$ et $g = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$, il y a alors une infinité de décompositions de ce type.
2) Ce résultat est vrai en dimension finie quelconque.

2 Isométries vectorielles de l'espace

2.1 Classification

$\overrightarrow{E}$ est un espace vectoriel euclidien de dimension 3.

Proposition. Les valeurs propres d'un élément $\overrightarrow{f}$ de $O(\overrightarrow{E})$ sont de modules 1 et 1 ou -1 est valeur propre de $\overrightarrow{f}$.
Si $\overrightarrow{F}$ est stable par $\overrightarrow{f}$, il en est de même pour $\overrightarrow{F}^{\perp}$.

Démonstration. Si $\overrightarrow{F}$ est stable par $\overrightarrow{f}$, $\forall \overrightarrow{y} \in \overrightarrow{F}^{\perp}$, $\left(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) | \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y})\right) = (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}) = 0$, ce qui montre que $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{F}^{\perp}\right) \subset \overrightarrow{F}^{\perp}$ et $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{F}^{\perp}\right) = \overrightarrow{F}^{\perp}$ car $\overrightarrow{f}$ est un automorphisme. Le polynôme caractéristique de $\overrightarrow{f}$ étant de degré 3 admet une racine, donc une valeur propre réelle λ. Soit $\overrightarrow{e} \neq \overrightarrow{0}$ un vecteur propre unitaire associé à λ. On a $||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e})|| = |\lambda| \, ||\overrightarrow{e}|| = ||\overrightarrow{e}||$ d'où $\lambda = \pm 1$.

Théorème. Isométrie vectorielle de l'espace $\overrightarrow{E}$: Une isométrie directe ($\det(\overrightarrow{f}) = 1$) est l'identité ou une rotation, une isométrie indirecte ($\det(\overrightarrow{f}) = -1$) est une réflexion ou une antirotation.

Démonstration. On considère le plan $\overrightarrow{P} = (\mathbb{R}\overrightarrow{e})^{\perp}$ stable par $\overrightarrow{f}$ d'après ce qui précède, où $\overrightarrow{e}$ est le vecteur propre intervenant ci dessus et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une base orthonormale de $\overrightarrow{P}$, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e})$ est alors une base orthonormale de $\overrightarrow{E}$ et la matrice M de $\overrightarrow{f}$ dans cette base est orthogonale. La restriction de $\overrightarrow{f}$ à $\overrightarrow{P}$ étant une isométrie du plan c'est une rotation ou une réflexion (symétrie par rapport à une droite). Dans le cas où c'est une réflexion on peut choisir $\overrightarrow{u}$ invariant et $\overrightarrow{v}$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$ et considérer la matrice dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{e})$. On obtient donc les matrices suivantes :

$$I_3, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les troisième et quatrième cas sont des cas particuliers des cas cinq et six pour $\theta = \pi$, il y a donc quatre types distincts. Le premier type est l'identité,le second type est la symétrie orthogonale par rapport au plan $\overrightarrow{P}$, c'est donc la réflexion de plan $\overrightarrow{P}$, le troisème type (cinquième cas) est la rotation d'axe $\overrightarrow{D} = \mathbb{R}\overrightarrow{e}$ et d'angle θ, les éléments de $\overrightarrow{D}$ sont invariants, dans le cas $\theta = \pi$ c'est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\overrightarrow{D}$ qu'on appelle aussi retournement ou demi tour, le dernier cas correspond à la composée de al rotation précédente avec la reflexion de plan $\overrightarrow{P} = \left(\overrightarrow{D}\right)^{\perp}$, on dit que c'est l'antirotation ou symétrie-rotation d'axe $\overrightarrow{D}$ et d'angle θ.

Pour caractériser une réflexion vectorielle il suffit de déterminer son plan qui est l'ensemble de ses vecteurs invariants.
Pour caractériser une rotation on commence par déterminer son axe, ensemble de ses vecteurs invariants puis son angle.

Remarque. La classification des isométries vectorielles de l'espace peut être réalisée de manière géométrique en montrant qu'une isométrie est composée d'une, deux ou trois réflexions. Voir [4]

2.2 Rotations

Rappel

Dans un espace euclidien $\overrightarrow{E}$ toute forme linéaire $u : \overrightarrow{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ est caractérisée par :
$\exists \overrightarrow{c} \in \overrightarrow{E},\ \forall \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E},\ u(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{c})$. On se place dans une base orthonormale $\mathcal{B}$, qui définit l'orientation de $\overrightarrow{E}$, dans cette base l'application $u : \overrightarrow{x} \longrightarrow \det_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{x}\right)$
est une application linéaire, dans ce cas le vecteur précédent est appelé produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ et noté $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$.

Proposition. Soient $\overrightarrow{f}$ la rotation d'axe $\overrightarrow{D} = \mathbb{R}\,\overrightarrow{e}$, $||\overrightarrow{e}|| = 1$ d'angle θ et $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$.
$\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{x}) = \cos\theta\,\overrightarrow{x} + (1-\cos\theta)\,(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{e})\,\overrightarrow{e} + \sin\theta\,(\overrightarrow{e} \wedge \overrightarrow{x})$

Démonstration. Supposons dans un premier temps que $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{P} = \left(\overrightarrow{D}\right)^{\perp}$, $\overrightarrow{x}$ normé, $\overrightarrow{f}|_{\overrightarrow{P}}$ est la rotation plane d'angle θ de matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans la base orthonormale $(\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{b})$ de $\overrightarrow{P}$ telle que $(\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{e})$ soit une base orthonormale directe de $\overrightarrow{E}$.
On a $\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{x}) = \cos\theta\,\overrightarrow{x} + \sin\theta\,\overrightarrow{b}$. Or les hypothèses précédentes concernant la base de $\overrightarrow{E}$ permettent d'écrire $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{e} \wedge \overrightarrow{x}$, soit
$\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{x}) = \cos\theta\,\overrightarrow{x} + \sin\theta\,\overrightarrow{e} \wedge \overrightarrow{x}$. Il est aisé de vérifier que cette égalité reste vérifiée si $\overrightarrow{x}$ n'est pas normé en le normant s'il n'est pas nul.
Dans le cas général on écrit $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2$ avec $\overrightarrow{x}_1 \in \overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{x}_2 \in \overrightarrow{P}$.
$\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{x}_2) = (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{e})\,\overrightarrow{e} + \cos\theta\,\overrightarrow{x_2} + \sin\theta\,(\overrightarrow{e} \wedge \overrightarrow{x}_2)$.
En écrivant $\overrightarrow{x}_2 = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_1 = \overrightarrow{x} - (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{e})\,\overrightarrow{e}$. on obtient le résultat annoncé.

Remarques. 1) En prenant un vecteur $\overrightarrow{x}$ normé orthogonal à $\overrightarrow{D}$, on a $\cos\theta = \left(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})\right)$
$\sin\theta = \det\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{e}\right)$, la première égalité provenant de $\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{x}) = \cos\theta\,\overrightarrow{x} + \sin\theta\,\overrightarrow{b}$ et la deuxième de $\det\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{e}\right) = \det\left(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})\right) = \left(\overrightarrow{e} \wedge \overrightarrow{x}|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})\right) = \left(\overrightarrow{b}|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})\right)$.

2) Pour identifier et caractériser un élément $\overrightarrow{f}$ de $O(\overrightarrow{E})$ on commence par vérifier que la matrice est bien orthogonale (dans une base orthonormale, les vecteurs colonnes (ou lignes) forment une base orthonormale).
Puis on cacule le déterminant. Si $\det(\overrightarrow{f}) = 1$, $\overrightarrow{f}$ est une rotation, on détermine alors son axe (ensemble des vecteurs invariants) puis son angle en utilisant la remarque précédente.
Si $\det(\overrightarrow{f}) = -1$, on détermine l'ensemble des vecteurs invariants, si c'est un plan $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{f}$ est une réflexion de plan $\overrightarrow{P}$, sinon si seul $\overrightarrow{0}$ est invariant $\overrightarrow{f}$ est une antirotation, on détermine son plan $\overrightarrow{P}$ et son angle θ en remarquant que $-\overrightarrow{f}$ est une rotation d'angle $\theta + \pi$, en effet on peut écrire $-Id_{\overrightarrow{E}}$ comme composée commutative de la réflexion de plan $\overrightarrow{P}$ et de la symétrie orthogonale par rapport à $\overrightarrow{D} = \left(\overrightarrow{P}\right)^{\perp}$ qui est une rotation d'angle π, on termine en remarquant que la composée de deux rotations de même axe et d'angles θ et π est une rotation de même axe et d'angle $\theta + \pi$.

Exemple. Soit $\overrightarrow{f}$ endomorphisme dont la matrice dans une base orthonormale directe de $\overrightarrow{E}$, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$ est :

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Pour simplifier les notations on va prendre $\overrightarrow{E} = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En notant C_i le i-ème vecteur colonne, $i \in [\![1,3]\!]$, on vérifie aisément que $(C_i|C_j) = 0$ si $i \neq j,\ i,j \in [\![1,3]\!]$ et $||c_i|| = 1,\ i \in [\![1,3]\!]$. Le calcul donne $\det(M) = 1$. $\overrightarrow{f}$ est une rotation, déterminons son axe $\overrightarrow{D}$:

$$\overrightarrow{a} = (x,y,z) \in \overrightarrow{D} \Longleftrightarrow M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+y-4z & = & 0 \\ 4x+5y+7z & = & 0 \\ x+8y-5z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -3z, y = z$$

Le vecteur normé $\overrightarrow{e} = \dfrac{1}{\sqrt{11}}(3,-1,-1)$ convient, $\overrightarrow{D} = \mathbb{R}\overrightarrow{e}$ est l'axe de $\overrightarrow{f}$.

Le vecteur normé $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{D}$ et on obtient par un calcul matriciel simple : $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \dfrac{1}{9\sqrt{2}}(5,11,4)$ ce qui entraine : $\cos\theta = (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})) = \dfrac{7}{18}$

$\sin\theta = \det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{e}\right) = \dfrac{5\sqrt{11}}{18}$.

3 Isométries affines de l'espace

3.1 Définitions

L'espace E est muni d'un repère othonormal direct. Nous avons déjà rencontré les translations et les symétries orthogonales.

Définition. Soit P un plan de l'espace affine E. La réflexion de plan P est la symétrie orthogonale par rapport à P, cest un antidéplacement dont la partie vectorielle est la réflexion vectorielle de plan $\overrightarrow{P}$ direction de P, c'est un antidéplacement de E.
Une rotation de E est un déplacement admettant au moins un point invariant.

Proposition. Une rotation de f E différente de Id_E admet une droite D de points invariants et $\overrightarrow{f}$ est une rotation vectorielle diffférente de $Id_{\overrightarrow{E}}$. La droite D est l'axe de f et l'angle θ de $\overrightarrow{f}$ est appelé angle de f. Si $\theta = \pi$, f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite D, f est aussi appelé retournement ou demi tour.

Démonstration. On a $\overrightarrow{f} \neq Id_{\overrightarrow{E}}$ sinon f serait une translation admettant un point fixe, cest à dire Id_E.
Soit A un point invariant par f.
M est invariant par $f \Longleftrightarrow \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{D} \Longleftrightarrow M \in D = A + \overrightarrow{D}$ ce qui montre que l'ensemble des points invariants de f est une droite D de direction $\overrightarrow{D}$. $\det(\overrightarrow{f}) = 1$, il s'agit donc d'une rotation vectorielle.

Remarque. Tout plan perpendiculaire à D est stable par f, la restriction de f à ce plan a un seul point invariant, intersection de D et du plan, c'est une rotation plane.

Définition. Un vissage est la composée commutative d'une rotation f d'axe D et d'une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ telle que $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$.

Si $I \in D$, $f \circ t_{\overrightarrow{u}}(I) = f(I) = t_{\overrightarrow{u}} \circ f(I)$ la première égalité provenant du fait que $t_{\overrightarrow{u}}(I) \in D$.
On a alors $f \circ t_{\overrightarrow{u}}(M) = f \circ t_{\overrightarrow{u}}(I) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IM}) = t_{\overrightarrow{u}} \circ f(M)$ pour un point M quelconque de E.

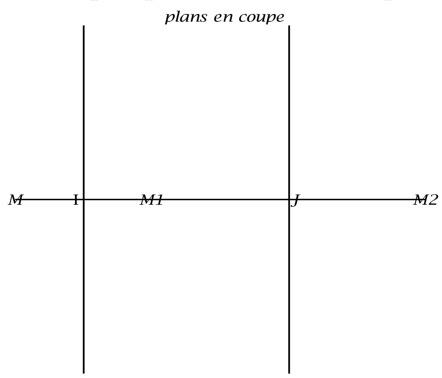
Proposition. Tout déplacement de E est un vissage.

Démonstration. Une rotation est un vissage avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ de même qu'une translation avec $\theta \equiv 0 \mod 2\pi$. Le cas général est un cas particulier de la forme réduite d'une isométrie obtenue dans le paragraphe 1.2.

Proposition. 1) Soient P et Q deux plans de E, Δ une droite perpendiculaire à ces plans et coupant P en A et Q en B, on note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. On a $S_Q \circ S_P = t_{2\overrightarrow{u}}$.
Réciproquement toute translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ peut décomposée comme produit de deux réflexions de plans parallèles P et Q, dont l'un d'entre eux peut être choisi de façon arbitraire parmi les plans orthogonaux à $\overrightarrow{v}$, $Q = t_{\frac{\overrightarrow{v}}{2}}(P)$.

2) La composée de deux réflexions $S_Q \circ S_P$ dont les plan sont sécants, avec $\Delta = S_Q \cap S_P$ est la rotation d'axe Δ et d'angle $\theta \equiv 2(P, Q) \mod 2\pi$.
Réciproquement une rotation d'axe Δ et d'angle θ peut être décomposée en produit de deux réflexions de plans P et Q sécants en d'axe Δ dont l'une peut être choisie arbitrairement avec $(P, Q) \equiv \frac{\theta}{2} \mod \pi$.

Démonstration. 1) Soit M un point de E et Δ_M la droite perpendiculaire aux deux plans, passant par M. Elle coupe P et Q respectivement en I et J. On appelle
$M_1 = S_P(M)$ et $M_2 = S_Q(M_1)$. On a alors $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{IM_1} + 2\overrightarrow{M_1J} = 2\overrightarrow{IJ}$.
La réciproque est une conséquence immédiate de cette démonstration.



2) Soit M un point de E ne se trouvant pas sur Δ, $M' = S_P(M)$ et $M'' = S_Q(M')$. On appelle Π_M le plan passant par M et perpendiculaire à Δ. On considère les droites $D = P \cap \Pi_M$, $D' = Q \cap \Pi_M$, $\{H\} = \Delta \cap \Pi_M$. On a alors M' et M'' qui sont les transformés respectifs de M et M' dans les symétries axiales S_D et $S_{D'}$ (planes) dans Π_M. Or $S_{D'} \circ S_D$ est la rotation de centre H et d'angle $2(D, D') \mod 2\pi$, ce qui montre, au vu de la définition d'une rotation que l'on passe de M à M'', dans E, par la rotation d'axe Δ et d'angle $2(P, Q) \mod 2\pi$. La réciproque est immédiate.

Définition. Une symétrie glissée est un antidéplacement de l'espace E, produit commutatif $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_P = S_p \circ t_{\overrightarrow{u}}$ d'une réflexion de plan P et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$.

C'est un antidéplacement car $\overrightarrow{t_{\overrightarrow{u}} \circ S_P} = \overrightarrow{S_P}$ qui est une réflexion vectorielle. La commutativité s'obtient comme dans le cas du vissage.

Définition. Une antirotation (ou symétrie-rotation) affine de centre O, d'axe Δ et d'angle θ est un antidéplacement $f = S_P \circ R_{\Delta,\theta} = R_{\Delta,\theta} \circ S_P$ produit commutatif d'une rotation d'axe Δ passant par O et d'angle θ et d'une réflexion de plan P passant par O et orthogonal à Δ.

C'est un antidéplacement car $\det\left(\overrightarrow{S_P \circ R_{\Delta,\theta}}\right) = -1$. La commutativité s'obtient également comme dans le cas du vissage.

Remarque. En appelant S_O la symétrie par rapport au point O on remarque que $S_O \circ S_P = S_\Delta$, symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ, ce qui permet d'écrire l'antirotation
$f = S_O \circ (S_O \circ S_P) \circ R_{\Delta,\theta} = S_O \circ S_\Delta \circ R_{\Delta,\theta} = S_O \circ R_{\Delta,\theta+\pi}$.
$\underline{f = S_O \circ R_{\Delta,\theta+\pi}}$.

3.2 Classification des isométries de l'espace

3.2.1 Isométries admettant un point fixe

Soit O un point fixe de f isométrie de E. En notant $M' = f(M)$ pour un point M de E, on a : $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'}$. L'isométrie vectorielle $\overrightarrow{f}$ détermine donc totalement f, ce qui entraine :

Proposition. Une isométrie de E admettant un point fixe est l'identité ou une rotation si c'est un déplacement, une réflexion ou une antirotation ou si c'est un antidéplacement.

Remarque. Une symétrie centrale par rapport à O est une antirotation de centre O, d'axe Δ quelconque passant par O et d'angle π.

3.2.2 Cas général

Proposition. Soit f une isométrie de E, $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ forme réduite de f (Voir 1.2).
- $g = Id_E$, f est une translation.
- g réflexion, f est une symétrie glissée.
- g rotation, f est un vissage.
- g antirotation, dans ce cas $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

En résumé :

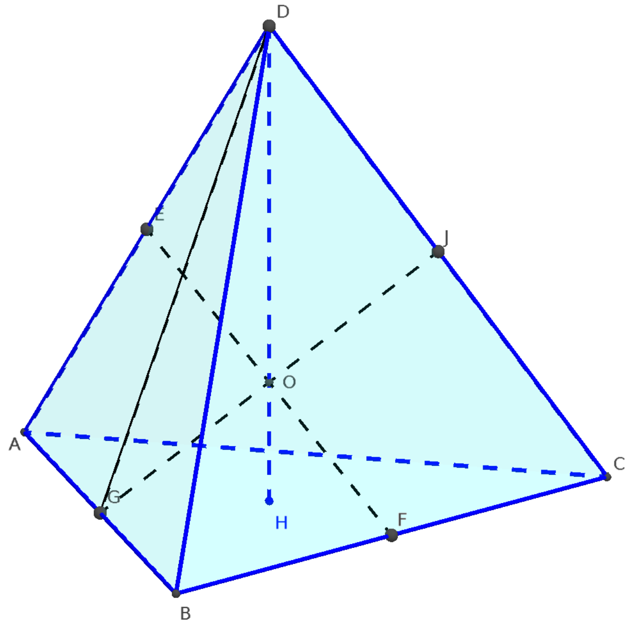
Les déplacements de E sont les rotations, les translations, les vissages, il s'agit dans tous les cas de vissages.
Les antidéplacements de E sont les réflexions, les symétrie glissées et les antirotations.

4 Isométries conservant une figure

Commençons par établir un résultat général utilisant les résultats de la proposition précédente

Proposition. Toute isométrie de l'espace qui conserve une partie finie dont l'isobarycentre est O est une rotation d'axe passant par O ou une réflexion de plan contenant O ou une antirotation de centre O.

4.1 Isométries conservant un tétraèdre régulier

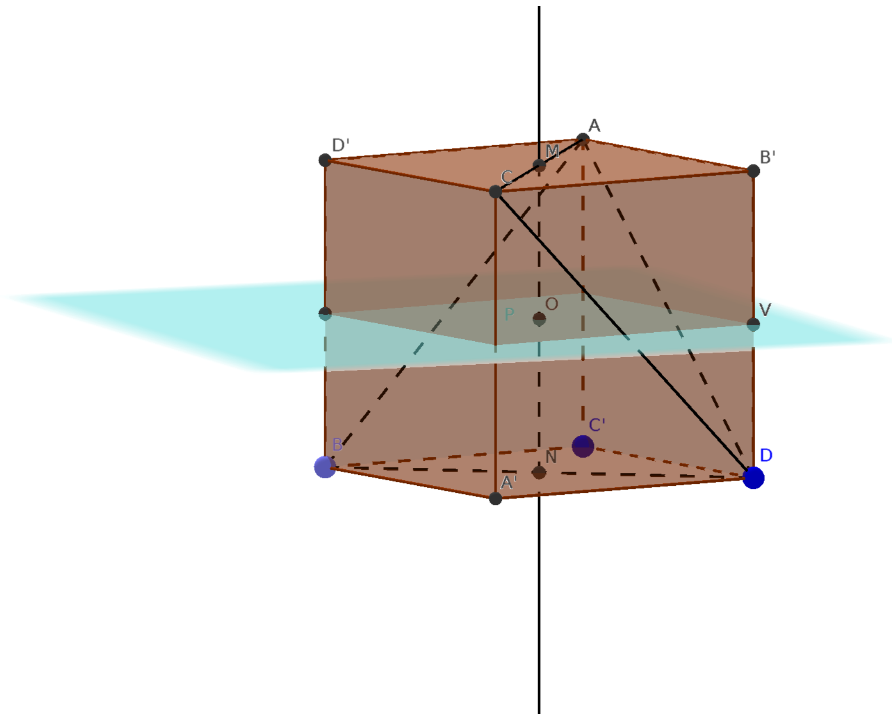


Rappel : Les quatre hauteurs d'un tétraèdre régulier $ABCD$ sont concourantes en O isobarycentre des quatre points et coupent la face opposée en le centre (isobarycentre) du triangle. Les bimédianes (droites joignant le milieu de deux côtés opposés) sont concourantes en le centre, orthogonales entre elles et aux côtés qu'elles joignent.

Démonstration. La droite (AB) est perpendiculaire au plan (DGH) en G milieu de $[AB]$, c'est donc le plan médiateur de ce segment et ce plan contient C qui est équidistant de A et B. La droite (CH) est donc la hauteur issue de C du triangle (ABC), le point H est ainsi le centre de ce triangle car il est sur chacune des hauteurs (qui sont aussi médianes et médiatrices). Le point O est sur (DH) car barycentre de $(D,1)$ et $(H,3)$ sachant que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}$, les quatre hauteurs sont donc concourantes en O.
Les plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$ se coupent en (GJ), qui est donc la perpendiculaire commune aux droites définies par ces segments. Le retournement selon (GJ) échange $[BC]$ et $[AD]$ ainsi que leur milieux respectifs E et F ce qui entraine que (GJ) est perpendicualire à (EF) en O.

Théorème. Le groupe G des isométries conservant un tétrèdre régulier $ABCD$ comprend 24 éléments : Les 12 rotations sont l'identité, les huit rotations autour des quatre hauteurs d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$ et les trois retournements autour des bimédianes. Les 12 antidéplacements sont les six réflexions par rapport aux plans médiateurs d'arêtes et les six antirotations de centre O , d'axes les trois bimédianes et d'angles $\pm\frac{\pi}{2}$. Le groupe est engendré par les six réflexions.

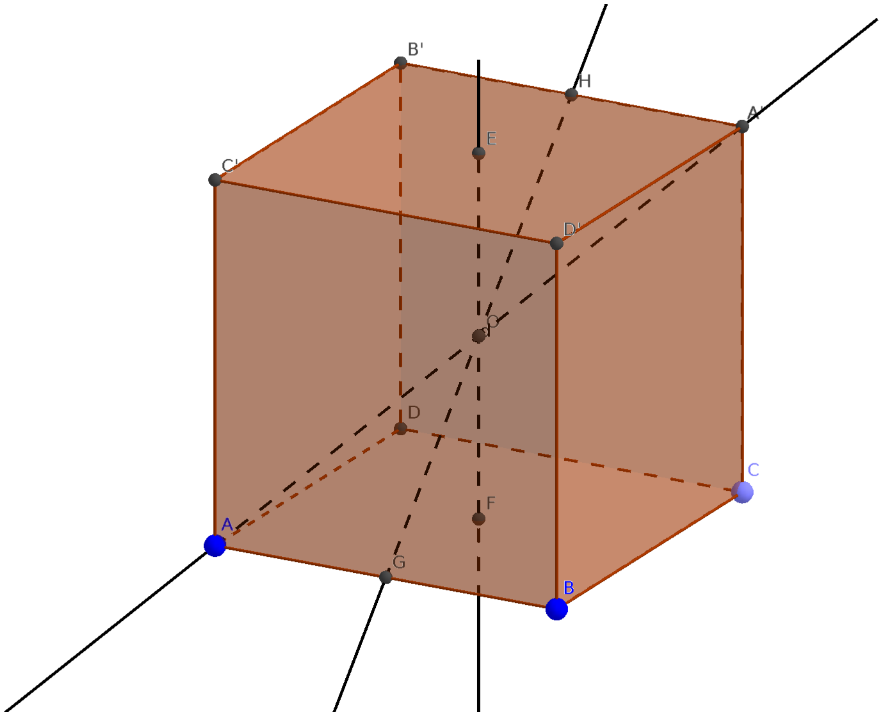
Démonstration. Les propriètès rappelées ci-dessus montrent que les douze rotations citées conservent bien le tétraèdre, tout plan médiateur est plan de symétrie du cube car il contient l'arête opposée.



L'antirotation de centre O et d'axe (MN) de plan P passant par O et perpendiculaire à (MN), d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme (A, B, C, D) en (B, C, D, A) comme le montre la figure précédente dans laquelle on utilise un cube dans lequel est inscrit le tétraèdre. On peut vérifier de la même manière que les cinq autres antirotations conservent le tétraèdre.
Pour montrer que l'on a de cette façon toutes les isométries conservant le tétraèdre il suffit de remarquer que le morphisme de groupe σ de G vers $S_{A,B,C,D}$ groupe des paermutations des quatres points, est injectif. Or si $f \in G$ telle que $f(A) = A, f(B) = B, f(C) = C$et $f(D) = D$ ceci entraine que $f = Id_E$. Il s'agit donc d'un isomorphisme car les deux groupes ont le même cardinal.

Un produit de deux réflexions selon deux plans médiateurs d'arêtes opposées est un retournement autour de la bimédiane correspondante, car les plans sont perpendiculaires.
Un produit de deux réflexions selon deux plans médiateurs d'arêtes ayant un sommet commun, est une rotation selon la hauteur qui est à l'intersection des deux plans. Les réflexions du tétraèdre engendrent donc ses rotations. En composant une réflexion avec les douze rotations on obtient les douze antidéplacements. Les réflexions engendrent le groupe.

4.2 Isométries conservant un cube



La droite (GH) est appelé axe binaire du cube, il y en a six. La droite (AA') est applée axe ternaire du cube, il y en a quatre, la droite (EF) est appelée axe quaternaire du cube, il y en a trois.

Théorème. Le groupe des isométries du cube comprend 48 éléments. Ses 24 rotations sont l'identité, les trois retournements et les six rotations d'angles $\pm\frac{\pi}{2}$ autour des trois axes quaternaires, les huit rotations d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$ autour des quatre axes ternaires et les six retournements autour des axes binaires. Ses 24 antidéplacements sont la symétrie de centre O qui peut être considérée comme une antirotation, les trois réflexions selon les plans médiateurs d'arêtes, les six réflexions selon les six plans déterminés par deux arêtes opposées, les six antirotations de centre O, d'axes les trois axes quaternaires et d'angles $\pm\frac{\pi}{2}$, les huit antirotations de centre O, d'axes les quatre axes ternaires d'angles $\pm\frac{\pi}{3}$. Ce groupe est engendré par les neufs réflexions.

Démonstration. Un déplacement conservant les huit sommets transforme le repère orthonomal direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ en un repère de même sens. Il y a huit choix possibles pour l'image de A, puis trois possibilités pour le choix de l'image de $\overrightarrow{AB}$ soit au plus 24 possibilités.

Une rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ ou π autour d'un axe quaternaire conserve le cube car cet axe joint les centres de deux faces opposées et est perpendiculaire à ces faces.

Le retournement suivant l'axe binaire (GH) conserve les rectangles $ABA'B'$ et $CDC'D'$ car il contient une médiane du premier et (GH) est perpendiculaire au plan du second en O. Les plans de ces deux rectangles sont perpendiculaires et se coupent suivant une médiane commune aux rectangles, les réflexions suivants ces plans conservent donc le cube.

Un plan médiateur d'arêtes l'est pour quatre arêtes parallèles, une réflexion suivant un tel plan conserve le cube. En composant cette rotation de plan P avec une rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ et d'axe perndiculaire (axe quaternaire) à P en O on obtient une antirotation qui conserve le cube.

L'axe ternaire $\Delta = (AA')$ est perpendiculaire aux plans des triangles équilatéraux $BC'D$ et $B'DD'$.et passe par leurs centres, les rotations $R_{\Delta,\frac{2\pi}{3}}$ et $R_{\Delta,-\frac{2\pi}{3}}$ conservent le cube. En les composant avec la symétrie

centrale S_O on obtient deux antidéplacements conservant le cube.
Appelons Π le plan orthogonal à Δ en O, cest à dire le plan médiateur de (AA'), on a $S_O = S_\Delta \circ S_\Pi$. Or $R_{\Delta,\frac{2\pi}{3}} \circ S_\Delta = R_{\Delta,\frac{2\pi}{3}} \circ R_{\Delta,\pi} = R_{\Delta,-\frac{\pi}{3}}$. Ces antidéplacements sont donc les antirotations $R_{\Delta,-\frac{\pi}{3}} \circ S_\Pi$ et $R_{\Delta,\frac{\pi}{3}} \circ S_\Pi$ données dans l'énoncé.

Deux plans P et P' déterminés chacun par deux arêtes opposées sont sécants suivant soit un axe quaternaire ou un axe ternaire ou un axe binaire, le produit $S_{P'} \circ S_P$ est soit un retournement d'axe quaternaire soit une rotation d'ordre 3, soit un retournement d'axe binaire.
Tout axe quaternaire est l'intersection d'un plan médiateur d'arêtes P et d'un plan déterminé par deux arêtes opposées, qui font un angle géométrique de $\frac{\pi}{4}$ exemple : $(EH) = (GFO) \cap (BDB')$. Le produit $S_{P'} \circ S_P$ est une rotation d'ordre quatre autour de cet axe quaternaire. Les 24 rotations sont engendrées par les réflexions du goupe. En composant une réflexion du groupe avec les rotations on engendre tous les antidéplacements du groupe.

On considère les quatrre grande diagonales notées $\Delta_A,\ \Delta_B,\ \Delta_C,\ \Delta_D$

Théorème. Le groupe G^+ des rotations d'un cube est isomorphe au groupe symétrique $S_{\Delta_A,\Delta_B,\Delta_C,\Delta_D}$, le groupe G des isométries du cube est isomorphe au produit direct de ce groupe par le groupe d'ordre 2, $\{Id_E, S_O\}$.

Démonstration. Une isométrie transforme une grande diagonale en une grande diagonale et induit donc une permutation de ces diagonales d'oùun morphisme $G^+ \longrightarrow S_{\Delta_A,\Delta_B,\Delta_C,\Delta_D}$. Or toute transposition de deux grande diagonale est induite par une rotation du cube par exemple le retournement d'axe $5GH$) écange les diagonales $[AA']$ et $[BB']$ et garde inchagées les deux autres, ce morphisme est donc surjectif, donc bijectif. S_O commute avec toutes les rotations car O est sur tous les axes, l'application $G^+ \times \{Id_E, S_O\}, (f,g) \mapsto f \circ g$ est un isomorphisme de groupe.

Références

[1] Michèle Audin. *Géométrie.* EDP Sciences, 2006.

[2] Jean Frenkel. *Géométrie pour l'élève professeur.* Hermann, 1973.

[3] Yves Ladegaillerie. *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique.* Ellipse, 2003.

[4] Jo Mellac. Espaces euclidiens. `http://www.jomellac.fr/cours/cours_eveuclidiens.pdf`.