

Oral I - Agrégation interne Analyse-Probabilités.

Leçon 254

Algorithmes d'approximation du nombre  $\pi$ .

J. Mellac

Mai 2016

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Algorithmes de nature géométrique</b>	<b>3</b>
1.1	Méthode d'Archimède . . . . .	3
1.2	La méthode des isopérimètres de Descartes . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Utilisation des séries</b>	<b>6</b>
2.1	Séries entières . . . . .	6
2.1.1	Utilisation de arcsinus . . . . .	6
2.1.2	Utilisation de arctangente . . . . .	6
2.2	Séries de Fourier . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Algorithmes récents</b>	<b>8</b>
3.1	Formule de Ramanujan . . . . .	8
3.2	Algorithme de Salamin et Brent. 1976 . . . . .	8
3.3	Formule BBP. Calcul du n-ième digit . . . . .	10

## Prérequis

Développement en série entière de arcsin et arctan.

Séries de Fourier : Théorèmes de Dirichlet et égalité de Bessel.

# 1 Algorithmes de nature géométrique

## 1.1 Méthode d'Archimède

Cette méthode revient à noter  $p_n$  le demi périmètre d'un polygone régulier à  $6 \cdot 2^n$  cotés inscrit dans un cercle de rayon 1 et  $q_n$  le demi périmètre du polygone régulier à  $6 \cdot 2^n$  cotés circonscrit au cercle puis à encadrer le périmètre du cercle par ces deux valeurs.

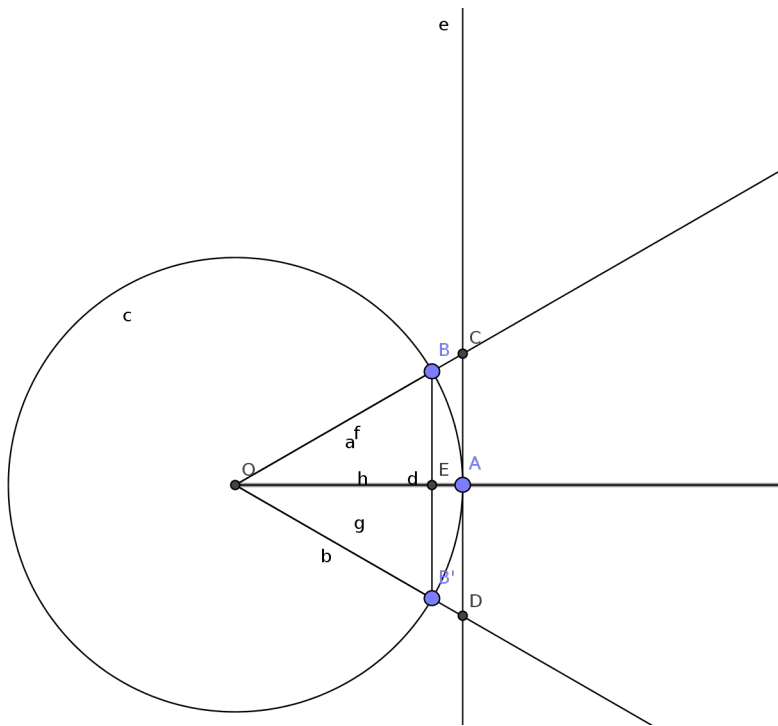
**Proposition.** On définit les suites  $u_n$  et  $v_n$  par :

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - u_n^2}\right)}, \quad v_{n+1} = \frac{\sqrt{1 + v_n^2} - 1}{v_n}$$

et les suites  $p_n$  et  $q_n$  par :

$$p_n = 6 \cdot 2^n u_n, \quad q_n = 6 \cdot 2^n v_n.$$

On a  $p_n \leq \pi \leq q_n$  et les suites  $p_n$  et  $q_n$  convergent vers  $\pi$ .



Cette figure montre que  $BB' \leq \widehat{BB'} \leq CD$ . en appelant  $\theta$  l'angle  $\widehat{OA, OB}$  ceci entraîne que :  $2 \sin \theta \leq 2\theta \leq 2 \tan \theta$ , soit pour les polygones définis précédemment :

$$\sin\left(\frac{\pi}{6 \cdot 2^n}\right) \leq \frac{\pi}{6 \cdot 2^n} \leq \tan\left(\frac{\pi}{6 \cdot 2^n}\right).$$

$$\text{Posons } u_n = \sin\left(\frac{\pi}{6 \cdot 2^n}\right), \quad v_n = \tan\left(\frac{\pi}{6 \cdot 2^n}\right).$$

Un développement limité donne :

$6 \cdot 2^n \cdot u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi$  et  $6 \cdot 2^n \cdot v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi$ .

En utilisant les relations

$2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos x = 1 - \sqrt{1 - \cos^2 x}$  et on obtient :

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - u_n^2}\right)}, \quad v_{n+1} = \frac{\sqrt{1 + v_n^2} - 1}{v_n}.$$

$$p_n = 6 \cdot 2^n u_n, \quad q_n = 6 \cdot 2^n v_n.$$

Avec  $n = 5$  on obtient  $p_5 \simeq 3.141452403$ ,  $q_5 \simeq 3.141870864$ .

Pour un calcul donné on observe environ  $\frac{3n}{5}$  décimales correctes au rang  $n$  :

$$q_n - p_n = 6 \cdot 2^n \tan\left(\frac{\pi}{6 \cdot 2^n}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{6 \cdot 2^n}\right)\right) = \frac{\pi^3}{72 \cdot 4^n} + o\left(\frac{1}{4^n}\right).$$

**Remarques.** 1) En remarquant que  $p_n - \pi = \frac{\pi^3}{216} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \lambda \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + o\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$ , on a  $p_n - \pi \sim \frac{\pi^3}{216} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ .

En utilisant la méthode d'accélération de Richardson, la suite

$p'_n = \frac{4p_{n+1} - p_n}{3} = \pi + \lambda \left(-\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{16}\right)^n + o\left(\frac{1}{16^n}\right)$  converge vers  $\pi$  avec une convergence quasi géométrique de raison  $\frac{1}{16}$ , alors que la suite d'origine avait une convergence quasi géométrique de raison  $\frac{1}{4}$ .

2) en utilisant les relations trigonométriques on a également les relations :

$$p_{n+1} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n}, \quad p_{n+1} = \sqrt{p_{n+1} q_n}$$

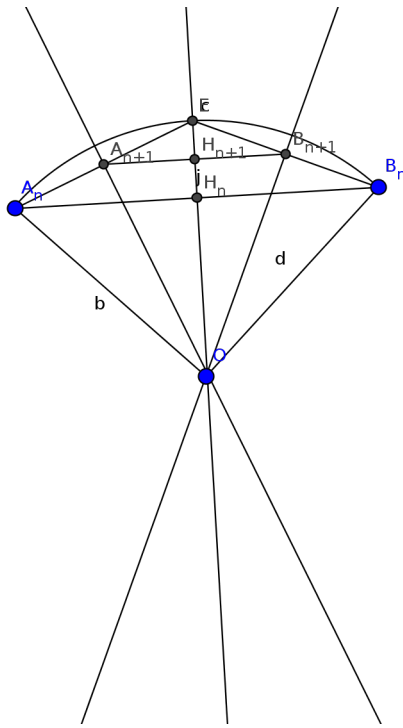
## 1.2 La méthode des isopérimètres de Descartes

**Proposition.** Soit  $L \in \mathbb{R}_+^*$ . La suite définie par :

$$r_0 = \frac{L}{8}, \quad r_{n+1} = \frac{r_n + \sqrt{r_n^2 + \frac{r_0^2}{4^n}}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

vérifie :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L}{2r_n} = \pi$ .

On appelle  $P_0, P_1, \dots, P_n$  des polygones réguliers à respectivement  $2^2, 2^3, \dots, 2^{n+2}$  cotés et ayant le même périmètre  $L$ .



On considère le cercle circonscrit au polygone  $P_n$  et  $A_n B_n$  un coté du polygone  $P_n$ . Le théorème de Thalès entraîne, avec les notations de la figure précédente,  $A_{n+1} B_{n+1} = \frac{1}{2} A_n B_n$ ,  $A_{n+1}$  et  $B_{n+1}$  étant les milieux de  $A_n E$  et  $E B_n$ , le polygone régulier  $P_{n+1}$ , de coté  $A_{n+1} B_{n+1}$  et comportant  $2^{n+3}$  cotés a donc le même périmètre que  $P_n$ . On note  $r_n = O H_n$ . Les triangles  $O H_{n+1} A_{n+1}$  et  $A_{n+1} H_{n+1} E$  sont homothétiques, on a donc :

$$A_{n+1} H_{n+1}^2 = E H_{n+1} \cdot H_{n+1} O.$$

Sachant que  $E H_{n+1} = H_{n+1} H_n = r_{n+1} - r_n$   
et que  $A_{n+1} H_{n+1} = \frac{1}{2} A_n H_n = \frac{1}{2^{n+1}} A_0 H_0 = \frac{1}{2^{n+1}} r_0$  on a :

$$r_{n+1} = \frac{r_n + \sqrt{r_n^2 + \frac{r_0^2}{4^n}}}{2}$$

relation obtenue en remarquant que  $r_{n+1}$  est racine positive de l'équation du second degré :

$$r_{n+1}^2 - r_n r_{n+1} = \frac{r_0^2}{4^{n+1}}.$$

Lorsque  $n$  tend vers l'infini, le polygone  $P_n$  tend à se confondre avec le cercle de périmètre

$$L = 8r_0 = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \text{ d'où } \frac{L}{2r_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi.$$

Pour  $n = 10$  on obtient  $\frac{L}{2r_{10}} \simeq 3,1415932$  en prenant  $L = 8$ ,  $r_0 = 1$ .

**Remarque.** L'expression  $\frac{r_0^2}{4^{n+1}} = (r_{n+1} - r_n)r_{n+1}$  fait penser à l'aire d'un rectangle de côtés  $r_{n+1}$  et  $r_{n+1} - r_n$ . La suite géométrique des aires de ce rectangle serait donc de raison  $\frac{1}{4}$ . A priori, la relation entre  $r_{n+1}$  et  $r_n$  devrait elle aussi se comporter comme une suite géométrique. La vitesse de convergence de cette suite est du même ordre que dans la méthode d'Archimède.

Ces méthodes, ainsi que d'autres utilisant des outils analogues, sont également détaillées sur [8]

## 2 Utilisation des séries

### 2.1 Séries entières

#### 2.1.1 Utilisation de arcsinus

Rappel :

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1.3.5 \cdots (2k-1)}{2.4.6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in ]-1, 1[.$$

On a

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}}{2k+1}.$$

En calculant

$$6 \sum_{k=0}^{20} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}}{2k+1}$$

on obtient 14 décimales exactes pour  $\pi$ , en sommant jusqu'à 200 on obtient, en vérifiant à l'aide de Maple, 120 décimales pour  $\pi$

#### 2.1.2 Utilisation de arctangente

Un certain nombre d'approximations de  $\pi$  sont obtenues en utilisant le développement en série entière de la fonction arctangente :

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in ]-1, 1[$$

série entière de rayon de convergence 1. John Machin (1680-1751) obtint 100 décimales de  $\pi$  en utilisant ce développement et en établissant la formule :

**Proposition.** Formule de Machin

$$4 \arctan \left(\frac{1}{5}\right) - \arctan \left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

**Démonstration.** Ce résultat est obtenu en remarquant que

$$ab < 1 \implies \arctan a + \arctan b = \arctan \left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

En écrivant  $2 \arctan \left(\frac{1}{5}\right) = \arctan \left(\frac{1}{5}\right) + \arctan \left(\frac{1}{5}\right) = \arctan \left(\frac{5}{12}\right)$  puis

$$4 \arctan \left(\frac{1}{5}\right) = \arctan \left(\frac{5}{12}\right) + \arctan \left(\frac{5}{12}\right) = \arctan \left(\frac{120}{119}\right) \text{ on obtient :}$$

$$4 \arctan \left(\frac{1}{5}\right) - \arctan \left(\frac{1}{239}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ce résultat peut être généralisé comme suit :

**Théorème.** Soient  $a_1, a_2, \dots, a_p$   $p$  entiers non nuls et  $b_1, b_2, \dots, b_p$   $p$  entiers.

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \sum_{j=1}^p \arctan\left(\frac{b_j}{a_j}\right) = k\pi \iff \operatorname{Im}\left(\prod_{j=1}^p (a_j + i.b_j)\right) = 0.$$

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \sum_{j=1}^p b_j \arctan\left(\frac{1}{a_j}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi \iff \prod_{j=1}^p \left(\frac{a_j + i}{a_j - i}\right)^{b_j} = i.$$

**Démonstration.** en posant  $c_j = a_j + i.b_j \in \mathbb{C}^*$ ,  $\sum_{j=1}^p \arctan\left(\frac{b_j}{a_j}\right)$  est un argument de  $\prod_{j=1}^p c_j$ .

Un argument de  $\left(\frac{a_j + i}{a_j - i}\right)^{b_j}$  est  $2b_j \arctan\left(\frac{1}{a_j}\right)$  et son module est 1.

**Exemples . 1)**

$$12 \arctan\left(\frac{1}{18}\right) + 8 \arctan\left(\frac{1}{57}\right) - 5 \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

2)

$$183 \arctan\left(\frac{1}{239}\right) + 32 \arctan\left(\frac{1}{1023}\right) + 12 \arctan\left(\frac{1}{110443}\right) - 68 \arctan\left(\frac{1}{5832}\right) - 12 \arctan\left(\frac{1}{4841182}\right) - 100 \arctan\left(\frac{1}{6826318}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Formule établie par Hwang Chien-Li en 1997.

3) La somme  $4 \sum_{k=0}^{20} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \left( \left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} - \left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1} \right)$ , obtenue à partir de la formule de Machin

donne une valeur approchée de  $\pi$  avec 30 décimales exactes : 3.141592653589793238462643383279 et 280 décimales exactes en sommant jusqu'à 200 au lieu de 20. Par comparaison la formule calculant une valeur approchée de  $6 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$  donne 14 décimales exactes avec  $n = 20$  et 120 avec  $n = 200$ .

**Remarque.** Ces formules ont été utilisées dans un passé récent (2003 par Kanada) pour calculer des décimales de  $\pi$ .

## 2.2 Séries de Fourier

Dans cette partie on obtient des valeurs approchées de puissances de  $\pi$ . Ces résultats sont nettement moins précis que les précédents.

1) Définissons la fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  sur  $] -\pi, \pi]$  par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in ] -\pi, 0[ \\ 1 & \text{si } x \in ]0, \pi[ \end{cases}$$

La fonction est impaire et si  $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , le théorème de Dirichlet entraîne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)x. \text{ En prenant } x = \frac{\pi}{2} \text{ on obtient :}$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)}$$

série dont la convergence est très lente.

2) Définissons la fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  sur  $[-\pi, \pi]$  par  $f(x) = x^2$ .  
Le théorème de Dirichlet entraîne :

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

En prenant  $x = \pi$ , on obtient :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

L'égalité de Bessel fournit l'égalité :

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

### 3 Algorithmes récents

#### 3.1 Formule de Ramanujan

Cette formule, démontrée par les frères Borwein au début des années 1980, fut donnée sans démonstration par un autodidacte, Ramanujan, en 1914. Gosper calcula, en 1985, plus de dix millions de décimales de  $\pi$  à l'aide de cette formule. La démonstration est très longue et ne sera pas donnée ici. Voir [6]

**Proposition.**

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 (396)^{4n}}$$

#### 3.2 Algorithme de Salamin et Brent. 1976

**Proposition.**

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$U_n = \frac{2a_n^2}{1 - \sum_{k=0}^n 2^k (a_k^2 - b_k^2)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \pi.$$

La démonstration de cette formule est longue et est détaillée sur [8]. Donnons les étapes de la démonstration en laissant au lecteur le soin des développements.

**Démonstration.**

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad a > b$$

Ces suites sont adjacentes et convergent vers une limite notée  $M(a, b)$ .

En notant  $I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} d\theta$  on a  $M(a, b) = \frac{\pi}{2I(a, b)}$  le principe de la démonstration, après avoir posé  $t = b \tan \theta$  consiste à montrer que (\*)  $I(a, b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$  puis à remarquer que (\*\*)  $I(a, b) = I(a_1, b_1) = \dots = I(a_n, b_n)$  converge uniformément vers  $\frac{\pi}{2M(a, b)}$ ,



$$\text{d'où } I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{M(a, b)} d\theta = \frac{\pi}{2M(a, b)}.$$

On définit l'intégrale elliptique

$$J(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

qui représente la longueur d'une ellipse. Soient  $(b, b') \in \mathbb{R}_+^{*2}$  vérifiant  $b^2 + b'^2 = 1$ , on a

$$L(b) = I(1, b)J(1, b') + I(1, b')J(1, b) - I(1, b)I(1, b') = \frac{\pi}{2}$$

On montre que la dérivée de  $L$  par rapport à  $b$  est nulle et on détermine la valeur constante de la fonction en faisant tendre  $b$  vers 0.

On termine en montrant que

$$J(a, b) = \left( a^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n 2^k (a_k^2 - b_k^2) \right) I(a, b)$$

la démonstration se fait comme pour (\*) : On montre que

$$J(a, b) = 2J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) - a.b.I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$$

en utilisant (\*\*\*) on a

$$J(a_n, b_n) = 2J(a_{n+1}, b_{n+1}) - a_n b_n I(a_{n+1}, b_{n+1}) = 2J(a_{n+1}, b_{n+1}) - a_n b_n I(a, b)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} 2^{n+1} (J(a_{n+1}, b_{n+1}) - a_{n+1}^2 I(a, b)) - 2^n (J(a_n, b_n) - a_n^2 I(a, b)) = \\ 2^{n-1} (-4a_{n+1}^2 + 2a_n^2 + 2a_n b_n) I(a, b) = 2^{n-1} (a_n^2 - b_n^2) I(a, b) \end{aligned}$$

En sommant sur  $n \in \mathbb{N}$  on obtient le résultat en remarquant que

$$\Delta_n = 2^n (a_n^2 I(a_n, b_n) - J(a_n, b_n)) = 2^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a_n^2 - b_n^2) \sin^2 \theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} d\theta$$

et

$$\Delta_n \leq 2^n (a_n^2 - b_n^2) I(a_n, b_n)$$

ce dernier terme tendant vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$  car  $(a_n^2 - b_n^2)$  tend vers zéro quadratiquement. En prenant  $b = b' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $a = 1$  permet d'obtenir

$$I\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(2 \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k (a_k^2 - b_k^2)\right) - 1\right) = \frac{\pi}{2}$$

d'où finalement

$$\pi = \frac{2M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 - \sum_{k=0}^{\infty} 2^k (a_k^2 - b_k^2)}$$

**Remarque.** C'est un algorithme quadratique, ce qui revient à dire que le nombre de décimales double à chaque itération.

### 3.3 Formule BBP. Calcul du n-ième digit

**Proposition.** Formule de Simon Plouffe, David Bailey et Peter Borwein.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left( \frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) = \pi.$$

**Démonstration.** On utilise l'égalité

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \frac{1}{8k+p} = (\sqrt{2})^p \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\sqrt{2}} x^{p-1+8k} dx = (\sqrt{2})^p \int_0^{\sqrt{2}} dx \frac{x^{p-1}}{1-x^8}$$

qui se vérifie aisément puis on réalise un développent en éléments simples de  $\frac{1}{1-x^8}$  pour terminer.

Cette formule permet de calculer le n-ième digit de  $\pi$  (n-ième terme du développement en base 2) sans connaître les précédents. Voir [5] et [7]

On appellera  $k$  ième digit de  $x \in \mathbb{R}$  le  $k$  ième digit de sa partie fractionnaire. en notant  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$  la partie fractionnaire de  $x$  on a le résultat

**Proposition.** Le  $N + n$  ième digit de  $\alpha \in \mathbb{R}$  est obtenu en calculant le  $n$  ième digit de  $\{2^N \alpha\}$ .

**Démonstration.**  $\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \{\alpha\} = \sum_{k \leq 0} \frac{\alpha_k}{2^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}$ ,

$$2^N \alpha = A + B, \quad A = \sum_{k \leq N} \frac{\alpha_k}{2^{k-N}}, \quad B = \{2^N \alpha\} = \sum_{k > N} \frac{\alpha_k}{2^{k-N}} \text{ ce qui entraine}$$

$\{2^N \alpha\} = B = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^{k-N}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{N+k}}{2^k}$ , le  $n$  ième digit de  $\{2^N \alpha\}$  est donc  $\alpha_{N+n}$  qui est le  $N + n$  ième digit de  $\alpha$ .

Déterminer le  $N + 1$  digit de  $\pi$ , revient à déterminer le premier digit de  $\{2^N \pi\}$ , c'est à dire au premier digit de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{4 \cdot 2^{N-4k}}{8k+1} - \frac{2 \cdot 2^{N-4k}}{8k+4} - \frac{2^{N-4k}}{8k+5} - \frac{2^{N-4k}}{8k+6} \right\} = A_N + B_N$$

avec

$$A_N = \sum_{0 \leq n \leq N/4}, \quad B_N = \sum_{n > N/4}$$

Le calcul de  $A_N$  est fait en l'écrivant sous la forme  $\left\{ \frac{p \cdot 2^n}{m} \right\} = \left\{ \frac{r}{m} \right\}$  où  $r$  est le reste de la division de  $p \cdot 2^n$  par  $m$ , autrement dit  $\left\{ \frac{p \cdot 2^n}{m} \right\} = \frac{p \cdot 2^n \bmod m}{m}$  qui peut être calculé par une méthode d'exponentiation rapide lorsque  $n$  est grand.

Concernant  $B_N$ , il suffit d'évaluer les premiers termes, suffisants pour que le reste de la somme soit inférieure à la précision requise.

voici quelques programmes python permettant le calcul de  $A_N$ .

```

def pu(m):
    """ Ecrit m sous la forme a*2**n """
    r=m%2
    a=m
    n=0
    while r==0:
        a=a//2
        r=a%2
        n+=1
    return n,a

def expo(n,m):
    """Calcule 2**n mod m, en recursif"""
    if n==0:
        return(1)
    elif n%2==0:
        return(expo(n//2,m)**2 % m)
    else:
        return(2*expo(n-1,m)) % m

def decomp(r,m):
    """Calcule r mod m"""
    n,p=pu(r)
    a=expo(n,m)
    return a*p % m

```

Pour terminer il est intéressant de noter que les formules du type Machin restent d'actualité, ainsi Kanada a calculé 1 241 100 000 000 décimales de  $\pi$  en utilisant deux formules de ce type [2]

## Références

- [1] *Numéro spécial Pi. supplément au petit archimède N° 64-65.* Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Mai 1980.
- [2] D. H. Bailey. Some background on Kanada's recent pi calculation. <http://www.nersc.gov/~dhbailey/dhpapers/dhb-kanada.pdf>, may 2003.
- [3] Fabrice Bellard. A new formula to compute the nth binary digit of pi. [http://bellard.org/pi/pi\\_bin.pdf](http://bellard.org/pi/pi_bin.pdf), Janvier 1997.
- [4] Jean-Paul Delahaye. *Le fascinant nombre pi.* Belin. Collection : Pour la Science, 1997.
- [5] S. P. Louffe, D.H. Bailey, P.B. Borwein. *On the rapid computation of various polylogarithmic constants.* Mathematics of computation, volume 66, pp. 903-913.
- [6] J. Borwein et P. Borwein. *Pi and the AGM : A study in Analytic Number Theory and Computational Complexity.* Wiley, 1987.
- [7] Xavier Gourdon. Computation of the nth binary digit of pi with low memory. <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Algorithms/nthdecimaldigit.pdf>, Janvier 1997.
- [8] Boris Gourévitch. Univers de pi. <http://www.pi314.net/fr/index.php>.
- [9] Boris Gourévitch. La quête des décimales de pi. [http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2004/102/smf\\_gazette\\_102\\_29-52.pdf](http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2004/102/smf_gazette_102_29-52.pdf), Mai 2004.