

Oral I - Agrégation interne Algèbre
Leçon 155
Systèmes linéaires
Applications.

J. Mellac

Décembre 2015

Table des matières

1	Système linéaire	3
1.1	Définitions	3
1.2	Structure de l'ensemble des solutions	3
1.3	Interprétation d'un système linéaire	3
2	Résolution d'un système linéaire	4
2.1	Systèmes de Cramer	4
2.2	Cas général, théorème de Rouché-Fontené	4
2.3	Définitions	5
2.4	Traduction en terme de produits matriciels	6
2.5	Méthode du pivot de Gauss	6
3	Applications	11
3.1	Interpolation polynomiale	11
3.2	En algèbre linéaire linéaire	12
3.3	En géométrie affine	12
4	Compléments	13
4.1	Factorisation LU	13
4.2	Décomposition LD^tL d'une matrice symétrique réelle	14
4.2.1	Méthode de Cholesky	14
5	Annexe	15

Le plan devra contenir la partie 1 en n'oubliant pas de citer la notion de rang du système, passer rapidement sur le théorème de Rouché-Rontené, bien développer le pivot de Gauss, sans nécessairement passer par l'interprétation matricielle. Il faudra également donner quelques applications.

1 Système linéaire

1.1 Définitions

Définition. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et \mathbb{K} un corps.

Un système

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

est appelé système de n équations à p inconnues où $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ est appelé second membre du système et $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice du système.

Le système est dit homogène si tous les termes du second membre sont nuls.

On appelle solution de (S) tout p -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les n équations du système.

Le rang de A est appelé rang du système.

1.2 Structure de l'ensemble des solutions

Proposition. Soit (S_0) le système homogène associé à (S) . L'ensemble des solutions \mathcal{S}_0 de S_0 est un sous espace vectoriel de \mathbb{K}^p .

Si l'ensemble \mathcal{S} des solutions de (S) est non vide :

$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + (x_1, x_2, \dots, x_p)$ où $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathcal{S}$, c'est donc un sous espace affine de \mathbb{K}^p s'il est non vide.

Démonstration. Il est immédiat que \mathcal{S}_0 est un sous espace vectoriel de \mathbb{K}^p .

Si (x_1, x_2, \dots, x_p) est solution du système (S) , $(y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{K}^p$ est solution de (S) si et seulement si $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_p - x_p)$ est solution de (S_0) .

Remarque. Le système (S_0) a toujours au moins une solution, la solution nulle $0_{\mathbb{K}^p}$, mais le système (S) peut n'avoir aucune solution.

1.3 Interprétation d'un système linéaire

1) Interprétation matricielle.

Le système est équivalent à $AX = B$ avec X matrice colonne des x_j est B matrice colonnes des $b_j, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Si $n = p$ et si A est inversible on dit que c'est un système de Cramer. Il a alors une solution unique : $X = A^{-1}B$.

2) Interprétation vectorielle.

En notant C_j la j -ième colonne de A , (S) est équivalent à :

$$\sum_{j=1}^p x_j C_j = B.$$

(S) admet une solution si et seulement si $B \in \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p)$.

3) Interprétation à l'aide d'une application linéaire.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A . En notant $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

(S) est équivalent à $u(x) = b$.

(S) a une solution si et seulement si $b \in \text{Im}u$. soit x_0 une solution de (S) , x est une autre solution si et seulement si $x - x_0 \in \text{Ker} f$ d'où :

$\mathcal{S} = x_0 + \text{Ker} f$ avec $\dim \text{Ker} f = p - r$, r étant le rang du système, c'est à dire de A .

4) Interprétation à l'aide de formes linéaires.

En posant $\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sum_{j=1}^p a_{ij}x_j$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ϕ_i est une forme linéaire sur \mathbb{K}^p et (S) est équivalent

à :

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_p) = b_i$. \mathcal{S} est alors l'intersection de n hyperplans affines.

2 Résolution d'un système linéaire

2.1 Systèmes de Cramer

On suppose $n = p$ et la matrice A du système inversible On note C_i la i -ème colonne de A , B le vecteur de l'interprétation matricielle et X la matrice colonne des x_j .

Proposition. Si $\det(A) \neq 0$, Le système a une solution unique donnée par

$$x_k = \frac{\det(C_1, \dots, C_{k-1}, B, C_{k+1}, \dots, C_n)}{\det(A)}, \quad k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Il suffit de noter $B = \sum_{k=1}^n x_k C_k$ et d'utiliser la n -linéarité du déterminant.

C'est un résultat purement théorique et peu utilisé pour les calculs effectifs sauf éventuellement avec $n = 2$ voire 3, de complexité importante.

2.2 Cas général, théorème de Rouché-Fontené

Rappel

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, Δ un déterminant d'ordre r extrait de la matrice A , un bordant de Δ est un déterminant (quelconque) extrait de A , d'ordre $r + 1$ et dont Δ est un déterminant extrait.

Proposition. La matrice A est de rang r si et seulement si :

- 1) Il existe un déterminant Δ , extrait de A , de rang r tel que $\Delta \neq 0$.
- 2) Tous les bordants de Δ sont nuls. En résumé, c'est le plus grand entier positif tel que l'on puisse extraire au moins une matrice carrée inversible d'ordre r

Démonstration. Notons ρ le rang de la matrice. On peut supposer, en permutant éventuellement des colonnes, que les colonnes de Δ sont les r premières colonnes, tronquées, de A . Ce qui montre que C_1, \dots, C_r sont linéairement indépendantes, puisque c'est déjà le cas pour ces colonnes tronquées. Ceci montre que $\text{Rg}(A) = \rho \geq r$.

Par définition du rang de la matrice, il existe ρ vecteurs colonnes que l'on peut supposer C_1, \dots, C_ρ , linéairement indépendants, dans la matrice de type (ρ, p) il y a ρ lignes linéairement indépendantes, la matrice carrée obtenue en supprimant les $p - \rho$ autres lignes est inversible et donc $r \geq \rho$.

Considérons un système de n équations à p inconnues :

$$\sum_{j=1}^p a_{ij}x_j = b_i \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Appelons A la matrice du système, en gardant les notations de 1.1. Soit r le rang du système (donc de A). Considérons un déterminant d'ordre r non nul, on peut supposer qu'il s'agit des r premières lignes et colonnes (résultat qui peut être obtenu par permutation de lignes et de colonnes). Les r premières équations sont appelées équations principales, les inconnues x_1, \dots, x_r sont les inconnues principales les $p - r$ autres inconnues auxiliaires, le déterminant d'ordre r non nul est appelé déterminant principal.

Théorème. de Rouché-Fontené.

- 1) si $r = n = p$ le système admet une solution unique.
- 2) Si $r = n < p$ le système admet des solutions que l'on obtient en résolvant le système de Cramer aux n inconnues principales que l'on écrit en fonctions des $p - n$ inconnues auxiliaires.
- 3) Si $r < n$, le système admet des solutions si et seulement si les $n - r$ déterminants caractéristiques

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & b_r \\ a_{k1} & \cdots & a_{kr} & b_k \end{vmatrix}, k \in \llbracket r + 1, n \rrbracket$$

sont tous nuls. Lorsque cette condition est vérifiée, le système est ramené aux r équations principales que l'on résout comme dans 2.

Démonstration. Le 1 et le 2 sont immédiats, le 2 se ramenant à

$x_1C_1 + \dots + x_nC_n = B - x_{n+1}C_{n+1} - \dots - x_pC_p$ système compatible car les n premières colonnes forment une base de \mathbb{K}^n .

Si $r < n$, appelons E le sous espace vectoriel de \mathbb{K}^n engendré par C_1, \dots, C_r le système est compatible si et seulement si la matrice dont les colonnes sont (C_1, \dots, C_r, B) est de rang r , le 3 est obtenu en utilisant la proposition précédente.

Ce théorème apporte une réponse théorique mais ne donne pas de méthode de résolution efficace d'un tel système.

2.3 Définitions

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle opération élémentaire sur les lignes d'une matrice M toute opération de l'un des types suivants :

En notant L_i la i -ème ligne de M :

- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, où $\lambda \in \mathbb{K}^*$: on ajoute à L_i la j -ème ligne de M multipliée par λ .
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$: on multiplie L_i par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
- $L_i \longleftrightarrow L_j$: permutation de 2 lignes de M .

On peut définir de la même manière des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B une matrice provenant de A par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes, $Rg(B) = Rg(A)$.

Démonstration. Appelons $F = \text{Vect}(L_1, L_2, \dots, L_n)$, $G = \text{Vect}(L'_1, L'_2, \dots, L'_n)$ où les L_i (respectivement les L'_i) sont les lignes de A (respectivement de B). Les L'_i étant obtenus comme combinaisons des L_i on a $G \subset F$, mais les L_i peuvent aussi être écrits comme combinaisons des L'_i ce qui montre finalement que $F = G$

2.4 Traduction en terme de produits matriciels

Proposition. Chaque opération sur les lignes de A consiste à multiplier A à gauche par une matrice inversible.

$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ par $T_{i,j} = I_n + \lambda E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Matrice de transvection

$L_i \leftarrow \lambda L_i$ par $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Matrice de dilatation

$L_i \longleftrightarrow L_j$ par $P_{i,j}(\lambda) = I_n - (E_{i,i} + E_{j,j}) + (E_{i,j} + E_{j,i}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Matrice de permutation

Démonstration. Montrons le premier résultat, les autres se traitant de la même manière. On considère

la base canonique $(E_{kl})_{(k,l) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} E_{kl}$. On utilise le résultat

$E_{i,j} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$ où δ_{jk} est le symbole de kronecker

$$(I_n + \lambda E_{i,j})A = A + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} E_{i,j} E_{kl} = A + \lambda \sum_{l=1}^p a_{jl} E_{il}$$

ce qui montre que la ligne λL_j est ajoutée à la ligne L_i .

Chaque opération sur les colonnes de A consiste à multiplier A à droite par une matrice inversible.

$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ par $T_{j,i} = I_p + \lambda E_{j,i} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

$C_i \leftarrow \lambda C_i$ par $D_i(\lambda) = I_p + (\lambda - 1)E_{i,i} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

$C_i \longleftrightarrow C_j$ par $P_{i,j}(\lambda) = I_n - (E_{i,i} + E_{j,j}) + (E_{i,j} + E_{j,i}) \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$.

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = A (I_3 - (E_{22} + E_{33}) + E_{32} + E_{23})$ qui échange les colonnes 2 et 3.

Remarque. 1) $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$, $T_{i,j}(\lambda)$ est une matrice de transvection, $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$, $D_i(\lambda)$ est une matrice de dilatation. $P_{i,j}$ est une matrice de permutation et $P_{i,j}^{-1} = P_{j,i}$.

2) En passant de A à B par n opérations sur les lignes (respectivement les colonnes) on a $B = P_n P_{n-1} \cdots P_1 A$ (respectivement $B = A Q_1 Q_2 \cdots Q_n$) où les P_i (resp les Q_j) sont des matrices inversibles.

2.5 Méthode du pivot de Gauss

Cette méthode consiste à transformer un système linéaire en un système plus simple, échelonné (si possible triangulaire si la matrice du système est carrée) par des opérations élémentaires sur les lignes, en n'oubliant pas le terme de la colonne de droite si le système n'est pas homogène. Ces différents systèmes sont équivalents comme on l'a vu plus haut.

Exemple.
$$\begin{cases} x + y + z + t & = & 1 \\ x + 2y + 3z + 4t & = & -1 \\ x + 3y + 6z + 10t & = & -2 \\ x + 4y + 10z + 20t & = & 2 \end{cases} \quad L_i \leftarrow L_i - L_1, \quad i \in \llbracket 2, 4 \rrbracket.$$

$$\begin{cases} x + y + z + t & = & 1 \\ y + 2z + 3t & = & -2 \\ 2y + 5z + 9t & = & -3 \\ 3y + 9z + 19 & = & 1 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2, \quad L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2.$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ y + 2z + 3t = -2 \\ z + 3t = 1 \\ 3z + 10t = 7 \end{cases} \quad L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3.$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ y + 2z + 3t = -2 \\ z + 3t = 1 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$t = 4, z = 1 - 3t = -11, y = -2 + 22 - 12 = 8, x = 1 - 8 + 11 - 4 = 0, \mathcal{S} = \{(0, 8, -11, 4)\}$$

Méthode du pivot de Gauss

Considérons une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle $d_i = \inf\{j \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_{ij} \neq 0 \text{ pour tout } i \text{ compris entre } 1 \text{ et } n\}$.

Définition. On dit que A est échelonnée (en ligne) si elle est nulle ou si étant non nulle il existe $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que :

- $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, L_i \neq 0$.
- $\forall i \in \llbracket r + 1, n \rrbracket, L_i = 0$.
- $1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_r \leq p$.

Cas $r = n$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1d_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1p} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2,d_2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nd_n} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Cas $r \leq n - 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1d_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1p} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2,d_2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{rd_r} & \dots & a_{rp} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Les coefficients $a_{id_i}, i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ sont les pivots de la matrice.

Proposition. La matrice A est de rang r .

C'est immédiat.

Théorème. Une opération élémentaire sur les lignes du système $AX = B$ (notations de 1.1) le transforme en un système équivalent.

Démonstration. En effet une opération élémentaire transforme le système $AX = B$ en $PAX = PB$, où $P \in GL_n(\mathbb{K})$ comme on l'a vu dans 2.4.

Dans la suite, A étant la matrice du système de type $n \times p$ et B le vecteur colonne de droite du système, à n lignes, on va par des opérations élémentaires sur la matrice A_1

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} & b_n \end{pmatrix}$$

obtenue en rajoutant le vecteur colonne B à droite de la matrice A , qui est donc de type $n \times (p + 1)$ la transformer (A_1) en une matrice échelonnée.

Si les colonnes C_1, C_2, \dots, C_d de A sont nulles, les variables x_1, x_2, \dots, x_d prennent des valeurs quelconques et il reste à résoudre le système pour $p - d$ inconnues. On peut donc supposer la première colonne de la matrice non nulle et après permutation éventuelle de lignes, $a_{11} \neq 0$.

On effectue sur A' les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}L_1$, $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Le système 1.1 devient :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2p}x_p = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{n2}x_2 + \dots + a'_{np}x_p = b'_n \end{cases}$$

Si un a'_{i2} est non nul on recommence avec un procédé analogue pour éliminer x_2 des équations 3 à n , s'ils sont tous nuls, on passe à la colonne suivante. Au bout d'un nombre fini d'étapes, on obtient un système échelonné équivalent au système 1.1.

Il y a alors trois cas possibles :

1) $n = p = r$.

il s'agit d'un système de Cramer :

$$\begin{cases} \mu_{11}x_1 + \mu_{12}x_2 + \dots + \mu_{1n}x_n = \beta_1 \\ \mu_{22}x_2 + \dots + \mu_{2n}x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \mu_{nn}x_n = \beta_n \end{cases}$$

La résolution de ce système se fait en remontant.

$$x_n = \frac{\beta_n}{\mu_{nn}}, x_i = \frac{1}{\mu_{ii}} \left(\beta_i - \sum_{j=i+1}^n \mu_{ij}x_j \right), i = n - 1, \dots, 1.$$

2) $r \leq n$ et $p > r$.

$$\begin{cases} \mu_{11}x_1 + \mu_{12}x_2 + \dots + \mu_{1r}x_r + \dots + \mu_{1p}x_p = \beta_1 \\ \mu_{22}x_2 + \dots + \mu_{2r}x_r + \dots + \mu_{2p}x_p = \beta_2 \\ \vdots \\ \mu_{rr}x_r + \dots + \mu_{rp}x_p = \beta_r \end{cases}$$

Les r premières inconnues sont les inconnues principales, les $p - r$ autres sont les inconnues auxiliaires. On résout le système en déterminant les inconnues principales en fonction des inconnues auxiliaires. On se ramène à un système de Cramer de r équations à r inconnues :

$$\begin{cases} \mu_{11}x_1 + \mu_{12}x_2 + \dots + \mu_{1r}x_r = \beta_1 - \mu_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - \mu_{1p}x_p \\ \mu_{22}x_2 + \dots + \mu_{2r}x_r = \beta_2 - \mu_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - \mu_{2p}x_p \\ \vdots \\ \mu_{rr}x_r = \beta_r - \mu_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - \mu_{rp}x_p \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est un espace affine de dimension $p - r$ qui est le nombre de paramètres.

3) $r = p < n$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{11}x_1 + \mu_{12}x_2 \cdots + \mu_{1p}x_p = \beta_1 \\ + \mu_{22}x_2 \cdots + \mu_{2p}x_p = \beta_2 \\ \vdots \\ \mu_{pp}x_p = \beta_p \\ 0 = \beta_{p+1} \\ \vdots \\ 0 = \beta_n \end{array} \right.$$

Ce système peut n'avoir aucune solution.

Exemples . On suppose dans ces exemples que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1) Résoudre le système

$$\mathcal{S} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_1, i = 1, 2$ donnent :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$$

puis l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

d'où $\mathcal{S} = \{(0, 0, 1)\}$.

2) Résoudre le système

$$\mathcal{S} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_1, i = 1, 2$ donnent :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

le système n'a pas de solution.

3) Résoudre le système

$$\mathcal{S} \begin{cases} x - 2y + t = 1 \\ x - y - z + 4t = 1 \\ x - 3y + z - 2t = 1 \end{cases}$$

Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_1, i = 1, 2$ donnent :

$$\begin{cases} x - 2y + t = 1 \\ y - z + 3t = 0 \\ -y + z - 3t = 0 \end{cases}$$

système équivalent à :

$$\begin{cases} x - 2y + t = 1 \\ y - z + 3t = 0 \end{cases}$$

ce système admet une infinité de solutions :

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z, t) = (1 + 2z - 7t, z - 3t, z, t), (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Choix du pivot dans le cas général

Lorsque l'on manipule des fractions, les calculs donnent des résultats exacts. Ce n'est plus le cas lorsque l'on utilise des nombres flottants. Deux nombres peuvent être distincts et avoir des représentations identiques par des flottants.

Par ailleurs la division par des nombres très petits en valeur absolue peut également amener des erreurs de calcul, ce qui peut poser des problèmes dans l'utilisation de pivots de petite valeur absolue.

Les calculs réels sont en fait entachés d'erreurs d'arrondi. Ceci a pour conséquence que le résultat final dépendra fortement du choix des pivots (ou encore de l'ordre des variables éliminées). On peut voir en gros ce qui se passe. On suppose que les variables x_1, x_2, \dots, x_{k-1} ont été éliminées. Pour éliminer l'inconnue x_k , on multiplie la ligne k par $\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$. Si le pivot a_{kk} est petit, toutes les erreurs qui affectent les coefficients a_{ik} seront amplifiées. En conséquence, on adopte la stratégie de recherche du pivot partiel (il existe également une méthode du pivot total) ; pour éliminer la variable x_k et quelque soit la valeur de $|a_{kk}|$, on recherche l'élément de plus grand module dans la colonne k et c'est lui que l'on prendra comme pivot effectif, après avoir fait la permutation de lignes nécessaire.

Exemple

$$(S_1) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 10^{-k}x_1 + x_2 = 0.5 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 10^{-k}x_1 + x_2 = 0.5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

En supprimant x_1 dans chaque système on obtient :

$$(S_1) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ (1 - 10^{-k})x_2 = 0.5 - 10^{-k} \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 10^{-k}x_1 + x_2 = 0.5 \\ (1 - 10^k)x_2 = 1 - 0.5 \times 10^k \end{cases}$$

En utilisant des réels double précision on obtient les résultats suivants :

	Système I	Système II
k=10	$x_1 = 0.5, x_2 = 0.5$	$x_1 = 0.5, x_2 = 0.5$
k=12	$x_1 = 0.5, x_2 = 0.5$	$x_1 = 0.499989, x_2 = 0.5$
k=14	$x_1 = 0.5, x_2 = 0.5$	$x_1 = 0.489600, x_2 = 0.5$
k=16	$x_1 = 0.5, x_2 = 0.5$	$x_1 = 1.110223, x_2 = 0.5$

On constate donc que la résolution du système II donne des résultats erronés dès que k devient suffisamment grand, alors que la résolution du système I reste parfaitement stable.

Complexité

on suppose ici que le système est de Cramer.

Phase 1 : recherche du pivot : Pour i fixé il y a $n - i$ comparaisons.

Phase 2 : échange éventuel : au maximum $(2n + 2)$ affectations.

phase 3 : opération élémentaire : $2n + 2$ affectations et le même nombre de multiplications, divisions et additions (ou soustractions), soit $(n - 1 - i)(2n + 2)$ pour i fixé.

$$\text{total : } \sum_{i=0}^{n-1} n - i + (2n + 2) + (n - 1 - i)(2n + 2) = \sum_{i=0}^{n-1} (2n + 3)(n - i) = (2n + 3) \frac{n(n + 1)}{2}.$$

phase 4 : remontée : à i fixé on a un maximum de n opérations soit une complexité de l'ordre de n^2 . La complexité de l'ensemble est donc en $O(n^3)$.

Dans les problèmes intervenant en mécanique, dans la méthode des éléments finis, il y a des systèmes pour lesquels n est très grand, il est alors nécessaire d'exploiter la forme particulière de certaines matrices pour pouvoir mener à bien la résolution. C'est le cas des matrices creuses (contenant beaucoup de zéros) ou symétriques pour lesquelles des algorithmes ont été développés pour pouvoir approcher des complexités en $O(n^2)$. Par ailleurs des techniques relevant de l'informatique sont également utilisées pour rendre ces calculs possibles, c'est le cas de la parallélisation des calculs. Plusieurs calculs sont effectués simultanément par plusieurs processeurs ce qui permet d'accélérer sensiblement le traitement.

On peut retenir comme ordre de grandeur qu'un ordinateur personnel va réaliser de l'ordre de 10^9 opérations élémentaires dans une minute. Par exemple, un algorithme « en n^2 » s'exécutera en temps raisonnable si $n = 10^4$, mais est à proscrire si $n = 10^7$.

Voici sous forme de pseudo code le principe de cet algorithme :

Dans le pseudo-code qui suit, on résout le système $Ax = y$. La ligne L_i désigne à la fois les coefficients de A (qui sont dans une matrice, un tableau bidimensionnel) et les seconds membres, qui sont dans une matrice colonne y . Les indexations de tableaux sont « à la Python » : de 0 à $n - 1$.

Pour i variant de 0 à $n-2$ faire

 Trouver j entre 1 et $n-1$ tel que $|a_{ji}|$ soit maximal

 Echanger L_i et L_j ne pas oublier le membre de droite

 Pour k de $i+1$ à $n-1$ faire

$$L_k \leftarrow L_k - \frac{a_{ki}}{a_{ii}} L_i$$

Arrivé ici, le système est sous forme triangulaire, et il n'y a plus qu'à « remonter », via des substitutions. Le résultat est mis dans un tableau x , et il s'agit donc de calculer :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n-1} a_{ik} x_k \right).$$

ce qui est calculé par l'algorithme suivant :

Pour i de $n - 1$ à 0 faire

 pour k de $i + 1$ à $n - 1$ faire

$$y_i \leftarrow y_i - a_{ik} x_k$$

$$x_i \leftarrow \frac{y_i}{a_{ii}}$$

3 Applications

3.1 Interpolation polynomiale

Polynômes de Lagrange

Etant donné $n + 1$ couples (x_i, y_i) , $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ de réels, les x_i étant tous distincts, déterminer un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $P(x_i) = y_i$. On écrit $P = \sum_{i=0}^n a_k X^k$. Le problème se ramène à résoudre le système de $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues :

$\sum_{i=0}^n a_k x_i^k = y_i$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ où les a_i , $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ sont les inconnues. Ce système est un système de Cramer car le déterminant du système est un déterminant de Vandermonde non nul.

3.2 En algèbre linéaire linéaire

recherche d'une base du noyau d'un endomorphisme, d'un espace propre, recherche de l'inverse d'une matrice, d'une matrice de changement de base ; recherche de polynôme minimal d'une matrice.

Exemple : Vérifier que la matrice suivante est inversible et déterminer son inverse éventuel :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ Il s'agit de montrer que :}$$

$$\forall (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \exists! (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ ce qui mène à la résolution du système :}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = x' \\ 2x - y + 2z = y' \\ -x + 2y + 2z = z' \end{cases}$$

On effectue les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$:

$$\begin{cases} 6y + 9z = x' + 4z' \\ 3y + 6z = y' + 2z' \\ -x + 2y + 2z = z' \end{cases}$$

on termine par $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$:

$$\begin{cases} -3z = x' - 2y' \\ 3y + 6z = y' + 2z' \\ -x + 2y + 2z = z' \end{cases}$$

C'est un système de Cramer : $x = \frac{1}{3}(2x' - 2y' + z')$, $y = \frac{1}{3}(2x' - 3y' + 2z')$, $z = \frac{1}{3}(-x' + 2y')$ ce qui permet d'écrire :

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3 En géométrie affine

Etude d'intersection d'hyperplans affines.

Exemple :

Considérons les quatre hyperplans affines de \mathbb{R}^5 :

$$\mathcal{H}_1 : x + 3y + 5z - 2t - 7u = 3$$

$$\mathcal{H}_2 : 3x + y + z - 2t - u = 1$$

$$\mathcal{H}_3 : 2x - y - 3z + 7t + 5u = 2$$

$$\mathcal{H}_4 : 3x - 2y - 5z + 7t + 8u = 1$$

Si l'intersection est non vide c'est un sous espace affine de dimension supérieure à $5-4=1$, sachant que cette dernière valeur est obtenue si les formes linéaires définissant

les hyperplans vectoriels associés forment une famille libre du dual de \mathbb{R}^5 . On obtient :

$$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_3 \cap \mathcal{H}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -17 \\ 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (t, u) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

L'intersection est donc un plan dont on connaît un point et deux vecteurs directeurs.

4 Compléments

4.1 Factorisation LU

Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible, s'il existe des matrices L et U respectivement triangulaires inférieures et supérieures telles que $A = LU$ où L ne contient que des 1 sur la diagonale, la résolution du système $AX = B$ est simplifiée car $LUX = B \iff LZ = B$ et $UX = Z$ systèmes de complexité en $O(n^2)$. Ceci est approprié s'il y a plusieurs systèmes à résoudre de matrice A mais avec plusieurs valeurs possibles pour B .

La matrice A étant inversible, cette factorisation est possible lorsque l'application de la méthode de Gauss ne nécessite aucune permutation de ligne. L'opération

$L_i \leftarrow L_i - m_{i1}L_1$, $m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ revient à multiplier A par une matrice de transvection

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -m_{i1} & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{i1} & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice inverse ne nécessitant aucun calcul supplémentaire.

On utilise le même principe pour éliminer les éléments sous la diagonale de la matrice A . La forme matricielle de cette élimination est :

$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = U$, On a alors $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} U$ et $L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$ est bien triangulaire inférieure, contenant des 1 sur la diagonale car c'est le cas de toutes les $E_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

appelons A_j la matrice extraite de A obtenue en gardant les j premières lignes et les j premières colonnes. Les déterminants de ces n matrices sont appelés déterminants principaux de A . On peut montrer :

Proposition. La matrice A admet une factorisation sous la forme $A = LU$ décrite ci-dessus si et seulement si tous les déterminants principaux de A sont non nuls. Une telle décomposition est alors unique.

Démonstration. Si on a $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \det(A_k) \neq 0$, dans la méthode de Gauss tous les pivots seront non nuls (sans tenir compte de leur taille) et il ne sera pas nécessaire de permuter des lignes.

Réciproquement si $A = LU$, en écrivant

$$A = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ E_k & G_k \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} U_k & H_k \\ 0 & M_k \end{pmatrix}$$

on a $A_k = L_k U_k$ soit $\det(A_k) = \det(U_k) = \prod_{i=1}^k u_{ii} \neq 0$.

Pour déterminer L et U on utilise la méthode des coefficients indéterminés, c'est à dire qu'on pose $A = LU$, on effectue le produit et on identifie, ce qui donne :

$$u_{11} = a_{11}$$

pour $j = 2$ à n :

$$u_{j1} = a_{1j}$$

$$l_{1j} = \frac{a_{j1}}{a_{11}}$$

Puis pour $i = 2..n - 1$

$$u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki}$$

Pour $j = i + 1..n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki} \right)$$

$$u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}.$$

4.2 Décomposition LD^tL d'une matrice symétrique réelle

On considère une matrice A symétrique réelle que l'on suppose factorisable sous forme LU . En divisant chaque ligne de U par son terme diagonal (non nul d'après l'hypothèse de factorisation) on peut écrire $U = DU'$ où la matrice diagonale D contient les termes diagonaux de U , ce qui donne $A = LDU'$ et ${}^tA = A \Rightarrow U' = {}^tL$ par l'unicité de la décomposition $A = LU$.

Si la matrice A est la matrice d'une forme quadratique Q dans une base donnée, en notant p le nombre de termes positifs sur la diagonale de D , la signatures de Q est $(p, n - p)$ car les matrices A et D sont congruentes.

4.2.1 Méthode de Cholesky

On munit l'espace vectoriel \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique.

Proposition. Une matrice A à coefficients réels est symétrique définie positive si et seulement si il existe une matrice B triangulaire inférieure inversible telle que $A = B^tB$. Si on impose de plus aux coefficients diagonaux de B d'être strictement positifs, cette décomposition est unique.

Démonstration. Une telle matrice admet une décomposition LU .

Si A est symétrique définie positive $A = LD^tL$ et les coefficients diagonaux de D sont strictements positifs, on peut écrire $D = D'^2$ et en posant $B = LD'$ on obtient la décomposition cherchée.

Réciproquement, A est symétrique et

$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, (Ax|x) = (B^tBx|x) = ({}^tBx|{}^tBx) > 0$ et A est définie positive.

5 Annexe

Voici quelques programmes en Python 3 qui peuvent être utiles pour la leçon 313.

1)

```
def piv_max(A,i):
    """ recherche du pivot maximal"""
    n=len(A) # le nombre de lignes
    j=i
    for k in range(i+1,n):
        if abs(A[k,i])>abs(A[i,i]):
            j=k
    return j
```

2)

```
def echange(A,b,i,j):
    """ echange des lignes i et j """
    m=len(A[0]) # nombre de colonnes
    b[j,0],b[i,0]=b[i,0],b[j,0]
    for k in range(m):
        A[i,k],A[j,k]=A[j,k],A[i,k]
```

3)

```
def elimination(A,b,j,i,p):
    """Lj<-Lj+p.Li"""
    m=len(A)
    b[j,0]=b[j,0]+p*(b[i,0])
    for k in range(m):
        A[j,k]=A[j,k]+p*A[i,k]
```

Programme principal.

```
def resolution(A,b):
    """resolution de A.X=b, A matrice inversible"""
    A1,b1=deepcopy(A),deepcopy(b)
    n=len(A1)
    # transformation en systeme triangulaire
    for i in range(n):
        j=piv_max(A1,i)
        if j>i:
            echange(A1,b1,i,j)
        for k in range(i+1,n):
            m=A1[k,i]/(A1[i,i])
            elimination(A1,b1,k,i,-m)
    #resolution systeme
    X=zeros_like(b1)
    for i in range(n-1,-1,-1):
        X[i,0]=(b1[i,0]-sum(A1[i,j]*X[j,0] for j in range(i+1,n)))/A1[i,i]
    return X
```

Références

- [1] Philippe Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2007.
- [2] Xavier Gourdon. *Les maths en tête : Algèbre*. Ellipse, 2009.
- [3] Douglas Faires Richard et Anette Burden. *Numerical Analysis*. CENGAGE Learning Custom Publishing, 2015.
- [4] Denis Serre. *Théorie des matrices*. Dunod, 2001.