Oral I - Agrégation interne Analyse-Probabilités.
Leçon 260
Couples de variables aléatoires discrètes. Covariance
Exemples d'utilisation.

J. Mellac

Décembre 2015-Janvier 2016

Table des matières

1 Couples de variables aléatoires discrètes

On considère $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé .

1.1 Loi conjointe

Définition. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, c'est à dire prenant un nombre fini ou dénombrable de valeurs On note $X(\Omega) = \{x_i, i \in E\}$, $Y(\Omega) = \{y_j, j \in F\}$ avec $E, F \subset \mathbb{N}$.
La **loi conjointe** ou **loi** du couple $Z = (X, Y)$ est définie par $A = (X, Y)(\Omega)$ et par les probabilités :
$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(\{\omega | X(\omega) = x \text{ et } Y(\omega) = y,\ (x, y) \in A\}) = \mathbb{P}\left(Z^{-1}(\{(x, y)\})\right)$.

Remarque. On a $\displaystyle\sum_{(x,y)\in A} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = 1$.

Exemples . 1) On lance deux dés. X est le plus petit (au sens large) des deux nombres obtenus, Y est le plus grand (au sens large) des deux nombres obtenus (de 1 à 6), loi du couple $Z = (X, Y)$. Il suffit de déterminer les valeurs possibles de $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$.
$i > j,\ \mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0,$
$i = j,\ \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(\{(i, i)\}) = \dfrac{1}{36}$
$i < j,\ \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(\{(i, j), (j, i\}) = \dfrac{1}{18}$.

2) On dispose d'une urne contenant quatre jetons numérotés de 1 à 4. On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne, on note (X, Y) les résultats des deux tirages. La loi conjointe peut être représentée sous forme d'un tableau.

X \ Y	1	2	3	4
1	0	1/12	1/12	1/12
2	1/12	0	1/12	1/12
3	1/12	0	1/12	1/12
4	1/12	1/12	1/12	0

1.2 Lois marginales

Définition. Les lois marginales du couple (X, Y) sont les lois des variables aléatoires X et Y.

Théorème. $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x) = \displaystyle\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$
$\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y = y) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$

On a $(X = x) = (X = x) \cap \left(\displaystyle\bigcup_{y\in Y(\Omega)} (Y = y)\right) = \displaystyle\bigcup_{y\in Y(\Omega)} ((X = x) \cap (Y = y))$, c'est une réunion d'évènements deux à deux incompatibles. La démonstration est identique pour la variable aléatoire Y.

Remarque. La connaissance des lois marginales ne permet pas, en général, de connaitre la loi conjointe.

Exemples . Exemple 1.
$p(X = i) = \displaystyle\sum_{j=i+1}^{6} \mathbb{P}(X = i, Y = j) + \frac{1}{36} = \frac{6 - i}{18} + \frac{1}{36},\ i \in [\![1, 6]\!]$,

$$\mathbb{P}(Y=j)=\sum_{i=1}^{j-1}\mathbb{P}(X=i,Y=j)+\frac{1}{36}=\frac{j-1}{18}+\frac{1}{36},\ j\in[\![1,6]\!].$$

Exemple 2.
Dans ce cas il est possible de faire la somme en ligne pour obtenir la loi de X et en colonne pour obtenir celle de Y.

X \ Y	1	2	3	4	Loi de X
1	0	1/12	1/12	1/12	1/4
2	1/12	0	1/12	1/12	1/4
3	1/12	1/12	0	1/12	1/4
4	1/12	1/12	1/12	0	1/4
Loi de Y	1/4	1/4	1/4	1/4	

On remarque que ces deux lois sont identiques, ce sont des lois uniformes sur l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ on a $\mathbb{P}(X=i)=\mathbb{P}(Y=j)=\dfrac{1}{4}$.

3) Loi trinomiale.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, et deux paramètres réels strictement positifs, p_x et p_y tels que $p_x+p_y\leq 1$. La loi trinomiale (n,p_x,p_y) est la loi du couple (X,Y) tel que
$(X,Y)(\Omega)=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2|i+j\leq n\}$ et
$\mathbb{P}\left(X=i,Y=j\right)=\dfrac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}p_x^i\,p_y^j\,(1-p_x-p_y)^{n-i-j}$.

Loi de X :

Soit $j\in[\![0,n]\!]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=j) &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=j,Y=k)\\
&= \sum_{k=0}^{n-j}\mathbb{P}(X=j,Y=k)+\sum_{k=n-j+1}^{n}\mathbb{P}(X=j,Y=k)\\
&= \sum_{k=0}^{n-j}\frac{n!}{j!\,k!\,(n-j-k)!}p_x^j\,p_y^k\,(1-p_x-p_y)^{n-j-k}+0\\
&= \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\,p_x^j\sum_{k=0}^{n-j}\frac{(n-j)!}{k!\,(n-j-k)!}p_y^k\,(1-p_x-p_y)^{n-j-k}\\
&= \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\,p_x^j\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}p_y^k\,(1-p_x-p_y)^{n-j-k}\\
&= \binom{n}{j}\,p_x^j\,(1-p_x)^{n-j},
\end{aligned}$$

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres (n,p_x), on montrerait de même que $Y\sim Bin(n,p_y)$.

1.3 Loi de f(X,Y)

Loi de $Z = f(X, Y)$ où (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes dont on connait la loi conjointe et f une application de
$X(\Omega) \times Y(\Omega)$ vers $\mathbb{R}$.

$\mathbb{P}(Z = z) = \sum\limits_{(x,y)\in Z(\Omega), f(x,y)=z} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$ et donc sous réserve d'intégrablilité de Z

$E(Z) = \sum\limits_{z\in Z(\Omega)} z\mathbb{P}(Z = z)$.

Toutefois le théorème de transfert permet d'éviter la détermination de la loi de Z.

1.4 Propriétés

Proposition. Soit X variable aléatoire discrète à valeurs réelles, intégrable on a :
$E(X) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$.

Démonstration. On a $E(X) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x)$ et
$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}\right) = \sum\limits_{\omega\in(X=x)} \mathbb{P}(\{\omega\})$, d'où
$x\mathbb{P}(X = x) = \sum\limits_{\omega\in(X=x)} \mathbb{P}(\{\omega\})\, X(\omega)$. D'où le résultat de la proposition lorsque x décrit $X(\Omega)$ car
$\bigcup\limits_{x\in X(\Omega)} (X = x) = \Omega$.

Théorème. de transfert.
Soit X une variable aléatoire discrète et $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que la variable aléatoire discrète $Z = f(X)$ soit intégrable, on a $E(Z) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$.

Démonstration. La proposition précédente permet d'écrire
$E(Z) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} Z(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\} = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} \sum\limits_{\omega\in(X=x)} f(x)\,\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} f(x)\,\mathbb{P}(X = x)$

ce théorème peut être appliqué à $Z = f(X, Y)$:

Si $\sum\limits_{(x,y)\in(X\times Y)(\Omega)} |f(x, y)|\mathbb{P}(X = x, Y = y) < \infty$
$E\left(f(X, Y)\right) = \sum\limits_{(x,y)\in(X\times Y)(\Omega)} f(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y)$, ce qui évite la détermination de la loi de Z.

Théorème. L'application $X \longmapsto E(X)$ où X variable aléatoire discrète à valeurs réelles et intégrable, est linéaire : X, Y variable aléatoire discrète réelles intégrables $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
$\lambda \in \mathbb{R},\ E(\lambda X) = \lambda E(X)$.

Il s'agit d'une application directe de la proposition précédente.

Corollaire. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ sous les hypothèses précédentes on a $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Remarque. Il est faux en général que $E(XY) = E(X)\,E(Y)$.

2 Loi conditionnelle, indépendance

2.1 Loi conditionnelle

Définition. Soient $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) > 0$. On définit $\mathbb{P}_{(Y=y)}(A) = \mathbb{P}(A|(Y = y)),\ A \subset \Omega$, c'est une probabilté sur Ω. La loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ est la loi de X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P}_{(Y=y)})$:

$$p_{(Y=y)}(X = x) = \mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}.$$

On définit de même la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ avec $\mathbb{P}(X = x) > 0$

Exemples . 1) soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes suivant une loi trinomiale (n, p_x, p_y), déterminons la loi conditionnelle de X sachant $(Y = k),\ k \in [\![0, n]\!]$. On peut remarquer que pour $j > n-k$, $\mathbb{P}(X = j|Y = k) = 0$. Soit $j \in [\![0, n-k]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = j|Y = k) &= \frac{\mathbb{P}\left((X = j) \cap (Y = k)\right)}{\mathbb{P}(Y = k)} \\
&= \frac{n!\, p_x^j\, p_y^k\, (1 - p_x - p_y)^{n-j-k}}{j!\, k!\, (n - j - k)!} \frac{k!\, (n - k)!}{n!\, p_y^k\, (1 - p_y)^{n-k}} \\
&= \frac{(n - k)!}{j!\, (n - k - j)!} \left(\frac{p_x}{1 - p_y}\right)^j \left(\frac{1 - p_x - p_y}{1 - p_y}\right)^{n-k-j}
\end{aligned}$$

C'est une loi binomiale de paramètres $\left(n - k,\ \dfrac{p_x}{1 - p_y}\right)$.

2) On considère $p \in]0, 1[$ et $\lambda > 0$ et le couple (X, Y) tel que $(X, Y)(\Omega) = \{0, 1\} \times \mathbb{N}$ dont la loi conjointe est définie par :
$\mathbb{P}(X = 0, = 0) = 1 - p$
$\mathbb{P}(X = 1, Y = k) = \dfrac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ k \in \mathbb{N}.$
$\mathbb{P}(X = 0, Y = k) = 0,\ k \in \mathbb{N}^*.$
Loi de X : $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p,\ \mathbb{P}(X = 1) = p.$
Loi conditionnelle de Y sachant que $X = 1$.
$k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y = k|X = 1) = \dfrac{\frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!}}{p} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, c'est une loi de Poisson de paramètre p.

Définition. Soient X une variable aléatoire discrète telle que $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x) > 0$ et Y une variable aléatoire discrète à valeurs réelles intégrable. L'espérance conditionnelle de Y par rapport à X est la fonction f définie par $f(x) = E(Y|X = x) = \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} y\, \mathbb{P}(Y = y|X = x)$, elle est notée $E(Y|X)$.

Remarque. Il est possible de définir f sur $X(\Omega)$ tout entier en posant, par exemple, $f(x) = 0$ si $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Proposition.
1. En prolongeant f comme indiqué on a $E(f(X)) = E(E(Y|X)) = E(Y)$.
2. Si Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires discrètes réelles intégrables $E(Y_1 + Y_2|X) = E(Y_1|X) + E(Y_2|X)$.
3. Soit $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $E(f(X)E(Y|X)) = E(f(X)Y)$.

Démonstration. 1)

$$E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X=x) = \sum_{x\in X(\Omega)} \left(\sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y=y|X=x)\mathbb{P}(X=x)\right)$$

$$E(f(X)) = \sum_{y\in Y(\Omega)} y \left(\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(Y=y, X=x)\right) = \sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y=y) = E(Y).$$

3)

$$E(f(X)E(Y|X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)E(Y|X=x)\,\mathbb{P}(X=x) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x) \left(\sum_{y\in Y(\Omega)} y\,\mathbb{P}(X=x|Y=y)\right)\mathbb{P}(X=x)$$

$$E(f(X)E(Y|X)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} f(x)\,y\,\mathbb{P}(X=x, Y=y) = E(f(X)Y)\,.$$

2.2 Indépendance

Définition. Deux variables aléatoires discrètes sont indépendantes si pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$ les évènements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, c'est à dire :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega),\ \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y).$$

Remarque. Si X et Y sont indépendantes, on a pour tout [5] $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$ tels que $\mathbb{P}(X = x) > 0$ et $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, $\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \mathbb{P}(X = x)$, $\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \mathbb{P}(Y = y)$, autrement dit la réalisation de l'un de ces évènements n'influe pas sur la réalisation de l'autre, dans ce cas la connaissance des lois marginales permet de retrouver la loi conjointe du couple, ce qui n'est pas le cas en général.

Exemple. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
Loi de $X + Y$:

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k, Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda^k \mu^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\lambda^k \mu^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}(\lambda+\mu)^n.$$

$X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$ calculons

$$\mathbb{P}(X=k|X+Y=n) = \frac{\mathbb{P}(X=k \text{ et } X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} = \frac{\mathbb{P}(X=k \text{ et } Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$$

$$\mathbb{P}(X=k|X+Y=n)=\frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\frac{e^{-\mu}\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!}}=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}.$$

La loi de X sachant que $X+Y=n$ est donc une loi binomiale de paramètres $\left(n, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

On a alors $E(X|X+Y=n)=\left(\dfrac{\lambda\, n}{\lambda+\mu}\right)$

Proposition. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs réelles et indépendantes.

1. $E(XY)=E(X)E(Y)$.
2. On a $E(Y|X)=E(X)$ presque surement et même surement si on fixe $E(Y|X=x)=E(Y)$ lorsque $\mathbb{P}(X=x)=0$.

Démonstration. 1)

$$E(XY)=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\,\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\,\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$$

$$=\left(\sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x)\right)\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} y\,\mathbb{P}(Y=y)\right)=E(X)E(Y)$$

2) Si $\mathbb{P}(X=x)>0$, $E(Y|X=x)=\displaystyle\sum_{y\in Y(\Omega)} y\,\mathbb{P}(Y=y|X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)} y\,\mathbb{P}(Y=y)=E(Y)$.

3 Espérance mathématique du couple, covariance

4 Les variables aléatoires discrètes sont à valeurs réelles.

3.1 Définitions, généralités

Définition.

— Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes intégrables, l'espérance du couple est définie par $E(X,Y)=(E(X),E(Y))$.

— Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes de carré intégrable, la covariance de X et de Y est $\mathbf{cov}(X,Y)=E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]=E(XY)-E(X)E(Y)$.

— Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes de carré intégrable, la matrice de covariance du couple (X,Y) est la matrice :

$$C=\begin{pmatrix}\mathbf{var}(X) & \mathbf{cov}(X,Y)\\ \mathbf{cov}(X,Y) & \mathbf{var}(Y)\end{pmatrix}$$

Proposition. Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes de carré intégrable, a et b deux réels, on a

$$\mathbf{var}(X+Y)=\mathbf{var}(X)+\mathbf{var}(Y)+2\mathbf{cov}(X,Y),\ \mathbf{var}(aX+b)=a^2\mathbf{var}(X)$$

Démonstration.

$$\mathbf{var}(X+Y) = E\left[(X+Y-E(X+Y)\right]^2 = E\left[(X-E(X)) + (Y-E(Y))\right]^2$$

$$\mathbf{var}(X+Y) = E\left(X-E(X)\right)^2 + E\left(Y-E(Y)\right)^2 + 2E\left((X-E(X))(Y-E(Y))\right) =$$

$$\mathbf{var}(X) + \mathbf{var}(Y) + 2\mathbf{cov}(X,Y)$$

.

> **Proposition.** 1. Une matrice de covariance C est symétrique et positive ($\forall v \in \mathbb{R}^2,\ (v|Cv) \geq 0$ où le produit scalaire est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$).
>
> 2. Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes indépendantes intégrables on a $E(XY) = E(X)E(Y)$ ce qui entraine $\mathbf{cov}(X,Y) = 0$. La réciproque est fausse.
> 3. Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes indépendantes et f et g deux fonctions telles que les variables aléatoires discrètes $f(X)$ et $g(Y)$ soient intégrables, on a $E\left(f(X)g(Y)\right) = E\left(f(X)\right)E\left(g(Y)\right)$, la réciproque étant fausse.
> 4. Si X et$Y$ sont indépendantes on a :
>
> $$\mathbf{var}(X+Y) = \mathbf{var}(X) + \mathbf{var}(Y)$$
>
> .

Démonstration. 1) La matrice est symétrique par définition. On note $v = {}^t(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$(v|Cv) = x^2\mathbf{var}(X) + 2xy\mathbf{cov}(X,Y) + y^2\mathbf{var}(Y) = \mathbf{var}(xX+yY) \geq 0$$

.

2) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes intégrables

$$E(|XY|) = E(|X|)E(|Y|) < \infty.$$

et on a alors $\mathbf{cov}(X,Y) = 0$.

3) et 4) sont des conséquences de 2 et de la proposition précédente.

> **Proposition.** Soient X et Y sont des variables aléatoires discrètes de carré intégrable :
>
> $$|\mathbf{cov}(X,Y)| \leq \sqrt{\mathbf{var}(X)}\sqrt{\mathbf{var}(Y)}$$

Démonstration. C'est une conséquence de la positivité de la matrice C.
Il s'agit de l'inégalité de Cauchy Schwarz. donnons une deuxième justification de ce résultat.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit
$P(\lambda) = E\left[\left(\lambda(X-E(X)) + (Y-E(Y))\right)^2\right]$.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) = \lambda^2\mathbf{var}(X) + 2\lambda\mathbf{cov}(X,Y) + \mathbf{var}(Y) \geq 0$$

c'est un trinôme du second degré en λ qui garde un signe constant, son discriminant est négatif ou nul :

$$\Delta' = (\mathbf{cov}(X,Y))^2 - \mathbf{var}(X)\mathbf{var}(Y) \leq 0$$

ce qui donne le résultat cherché.
On peut montrer en utilisant ce trinôme qu'il y a égalité si et seulement si $X - E(X)$ et $Y - E(Y)$ sont presque surement colinéaires, ce qui revient à dire que X et Y vérifie presque surement une relation $aX + bY + c = 0$ avec a, b, c réels.

Définition. Soient X et Y des variables aléatoires discrètes de carré intégrable telles que $\mathbf{var}(X) > 0,\ \mathbf{var}(Y) > 0$. Le coefficient de corrélation de ces variables est défini par : $r_{X,Y} = \dfrac{\mathbf{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{var}(X)\mathbf{var}(Y)}}$

Proposition. Soient X et Y sont des variables aléatoires discrètes de carré intégrable telles que $\mathbf{var}(X) > 0,\ \mathbf{var}(Y) > 0$:
$-1 \leq r_{X,Y} \leq 1$ et $|r_{X,Y}| = 1$ si et seulement si les variables vérifient presque surement une relation $aX + bY + c = 0$ avec a, b, c réels.

C'est une conséquence immédiate de ce qui précède.

3.2 Fonction génératrice

Dans ce paragraphe les variables sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes

1. La fonction génératrice de X est définie par la série entière :

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{k \in X(\Omega)} s^k \, \mathbb{P}(X = k).$$

   On définit de la même manière la fonction génératrice de Y.

2. La fonction génératrice du couple (X, Y) est définie par :

$$G_{(X,Y)}(s,t) = E(s^X t^Y) = \sum_{k \in X(\Omega), l \in Y(\Omega)} s^k t^l \, \mathbb{P}(X = k, Y = l).$$

Proposition.

1. La fonction génératrice de X a un rayon de convergence $R \geq 1$. elle détermine la loi de X : $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$.
2. De même la fonction génératrice détermine la loi conjointe de (X, Y) :

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \frac{1}{k!\, l!} \frac{\partial^{k+l} G_{(X,Y)}}{\partial s^k \partial t^l}(0,0)$$

3. $G_X(s) = G_{(X,Y)}(s, 1),\ G_Y(t) = G_{(X,Y)}(1, t)$.
4. Si X est intégrable, $E(X) = G'_X(1) = \dfrac{\partial G_{(X,Y)}}{\partial s}(1,1)$.
5. Si X est de carré intégrable, $G''_X(1) = E\left[X(X-1)\right]$ soit $E(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$ et

$$E(X^2) = \frac{\partial^2 G_{(X,Y)}}{\partial s^2}(1,1) + \frac{\partial G_{(X,Y)}}{\partial s}(1,1).$$

6. Si X et Y sont de carré intégrable :

$$E(XY) = \frac{\partial^2 G_{(X,Y)}}{\partial s \partial t}(1,1).$$

Ces résultats s'obtiennent simplement par dérivation de séries entières dans leur intervalle de convergence.

Proposition. 1. Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^2$; On a
$G_{X+Y}(s) = G_{(X,Y)}(s, s)$. Ce résultat permet d'obtenir la loi de la somme quand on connait la loi conjointe du couple, lorsque les variables ne sont pas indépendantes.

2. Les variables aléatoires discrètes X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ sont indépendantes si et seulement si $G_{(X,Y)}(s, t) = G_X(s)G_Y(t)$.

Démonstration. 1) $G_{X+Y}(s) = E(s^{X+Y}) = E(s^X\, s^Y) = G_{(X,Y)}(s, s)$.

2) Si X et Y sont indépendantes, $G_{(X,Y)}(s, t) = E(s^X\, t^Y) = E(s^X)\, E(t^Y) = G_X(s)G_Y(t)$.

Réciproquement si on a $G_{(X,Y)}(s, t) = G_X(s)G_Y(t)$,

$$\mathbb{P}(X = k, Y = s) = \frac{1}{k!\, l!} \frac{\partial^{k+l} G_{(X,Y)}}{\partial s^k \partial t^l}(0, 0) = \frac{G_X^(k)(0)}{k!} \frac{G_Y^{(l)}(0)}{l!} = \mathbb{P}(X = k)\, \mathbb{P}(Y = l).$$

4 Utilisation : ajustement linéaire

On considère deux variables aléatoires discrètes réelles X et Y prenant n valeurs chacune, la loi conjointe vérifiant :
$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_i) = \dfrac{1}{n},\ i \in [\![1, n]\!] \Rightarrow \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(Y = y_i) = \dfrac{1}{n},\ i \in [\![1, n]\!]$. On veut étudier s'il existe une relation $Y = f(X)$ entre ces variables, l'étude se ramenant à $f(x) = ax + b$. Le paragraphe montre que cette relation est obtenue si et seulement si $|r_{X,Y}| = 1$, égalité qui sera rarement obtenue. Il est possible de considérer toutefois que l'on a une relation "presque linéaire" lorsque $|r_{X,Y}|$ est proche de 1, il reste alors à déterminer a et b, la méthode utilisée est la méthode des moindres carrés.
On note $e_i = y_i - (ax_i + b)$ erreur que l'on commet en remplaçant y_i par $ax_i + b$ et cette méthode consiste à rendre minimal la quantité $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i^2$.

Proposition. E est minimal lorsque $a = \dfrac{\mathbf{cov}(X, Y)}{\mathbf{var}(X)},\ b = E(Y) - aE(X)$.

Démonstration. On considère la fonction de deux variables $f(a, b) = E = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = -2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - (ax_i + b)),\ \frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b)).$$

Le système $\dfrac{\partial f}{\partial a}(a, b) = 0,\ \dfrac{\partial f}{\partial b}(a, b) = 0$ entraine :

$$nb = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i) = nE(Y) - anE(X),\ a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\, E(X)\, E(Y)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - nE(X)^2}.$$

$$a = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - E(X)\, E(Y)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - E(X)^2} = \frac{\mathbf{cov}(X, Y)}{\mathbf{var}(X)},\ b = E(Y) - \frac{\mathbf{cov}(X, Y)}{\mathbf{var}(X)} E(X).$$

Pour montrer que c'est bien un minimum il faut vérifier que cette condition est suffisante.

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a,b) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a,b) = 2n, \ \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}(a,b) = 2nE(X)$$

ce qui entraine $rt - s^2 = 4n^2\mathbf{var}(X) > 0$, avec $r > 0$ ceci entraine bien la présence d'un minimum.

Exemple. On dispose d'un échantillon de 24 offres de ventes d'appartements situés dans le V^e et le VI^e arrondissement de Paris en 1975.

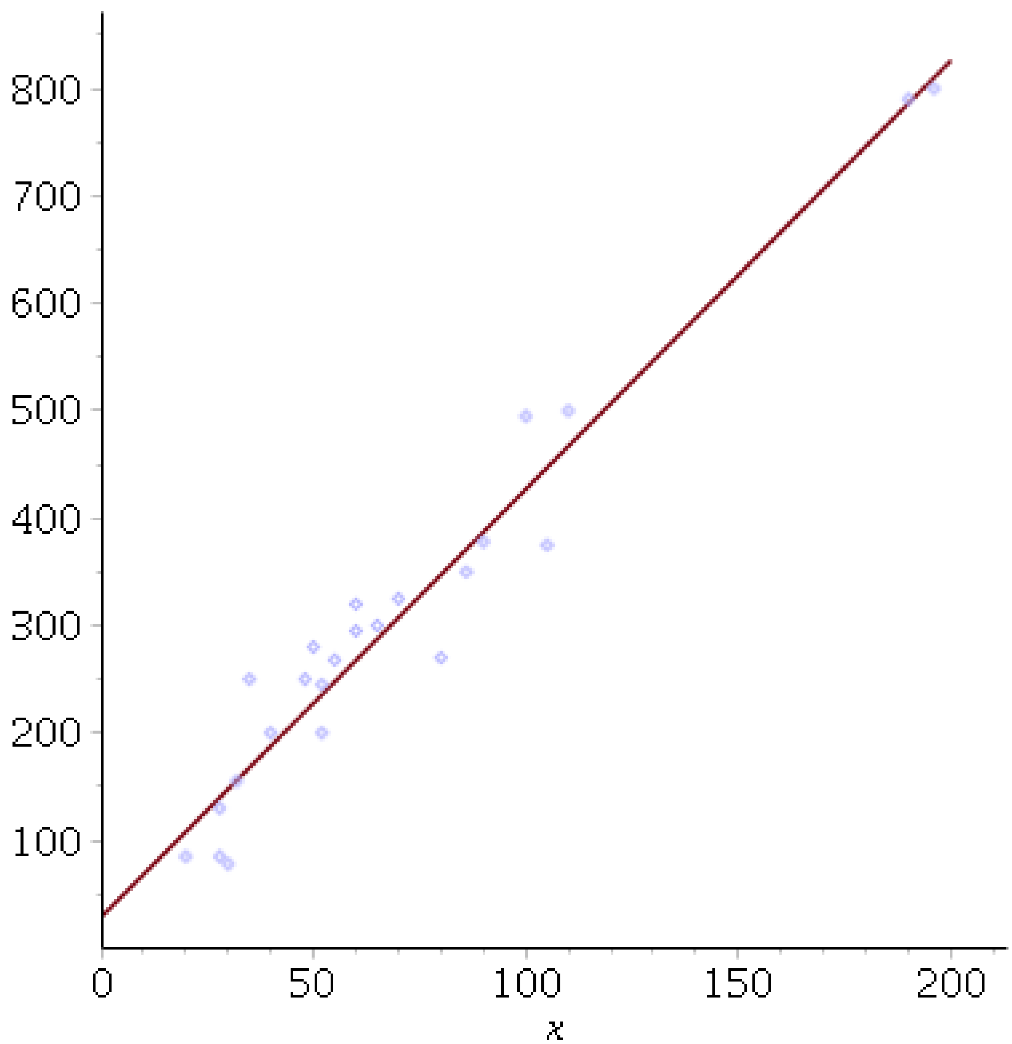
Y en millier de francs	130	280	800	268	790	500	320	250	378	250	350	300
X surface en m^2	28	50	196	55	190	110	60	48	90	35	86	65

Y en millier de francs	155	245	200	325	85	78	375	200	270	295	85	495
X surface en m^2	32	52	40	70	28	30	105	52	80	60	20	100

On a

$$E(X) = 70,08\ m^2;\ E(Y) = 309,33\ KF;\ \sqrt{\mathbf{var}(X)} = 44,69;\ \sqrt{\mathbf{var}(Y)} = 182,95;\ r_{X,Y} = 0,97$$

d'où l'équation de la droite d'ajustement linéaire :$y = 3,98\,x + 30,09$. La valeur de $r_{X,Y}$ montre que l'ajustement est de bonne qualité comme on peut le voir sur la figure ci-dessous.



Remarque. Dans le cas où $f(x) = k\alpha^x$, $g(x) = \ln f(x)$ permet de se ramener à un ajustement linéaire.

Dans le cas où $f(x) = kx^c$, $\ln f(x) = c \ln x + \ln k$ permet de se ramener à un ajustement linéaire de $\ln y$ par rapport à $\ln x$.

Références

[1] D. Dacunha-Castelle et M. Duflo. *Probabilités et statisques. Problèmes à temps fixe.* Masson, 1994.

[2] P. Barbe et M. Ledoux. *Probabilités.* EDP Sciences, 2007.

[3] C.Duhamel et T.Meyre M. Cottrel, V. Genon-Catalot. *Exercices de probabilités.* Cassini, 2011.

[4] Jean-Pierre Ouvrard. *Probabilités 1.* Cassini, 1998.

[5] A. Renyi. *Calcul des probabilités.* Dunod, 1966.